سلسلة 1 للمتطابقات الهامة

تمرين 1 :

أحسب وبسط مايلي :

$$A = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \quad ; \quad B = 3\left(\frac{2}{5} - 1\right) + \frac{9}{5} \quad ; \quad C = \frac{2}{5} \div \frac{4}{5} \times 2 - 3$$

تمرين 2 :

أنشر و بسط مايلي :

$$A = 2a(-3a + 4) \quad ; \quad B = -3x[4 - 2x - 3(x - 1)]$$

$$C = (3x - 4)(5x - 2) \quad ; \quad D = (-5x + 3)(2x - 4)$$

تمرين 3 :

عمل مايلي :

$$A = 6x^2 - 18x$$

$$B = -2x(x - 3) + 6x(x - 3)$$

$$C = (2x + 3)(x - 5) - (3x - 1)(x - 5)$$

$$D = (3x - 1)^2 + (2x - 3)(3x - 1)$$

تمرين 4 :

1) أتمم الفراغ بما يناسب :

$$(\ldots + b)^2 = a^2 + \cdots \ldots \ldots . + \cdots \quad ; \quad (a - \cdots)^2 = \cdots - \cdots \ldots \ldots + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (\ldots - \cdots)(\ldots + \cdots) \quad ; \quad (x + \cdots)^2 = \cdots + \cdots \ldots \ldots + 36$$

$$(3 - \cdots)^2 = \cdots - \cdots \ldots \ldots + y^2 \quad ; \quad x^2 - 81 = (\ldots + \cdots)(\ldots - \cdots)$$

2) أنشر وبسط مايلي :

$$A = (x + 3)^2 \quad ; \quad B = (2x - 5)^2 \quad ; \quad C = (x - 6)(x + 6)$$

3) عمل مايلي :

$$A = x^2 + 6x + 9 \quad ; \quad B = 4x^2 - 20x + 25 \quad ; \quad C = x^2 - 25$$

حل السلسلة 1 للمتطابقات الهامة

تمرين 1 :

أحسب وبسط مايلي :

$$A=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{3}-\frac{2}{6}=\frac{5\times2}{3\times2}-\frac{2}{6}=\frac{10}{6}-\frac{2}{6}=\frac{8}{6}$$

$$B=3\left(\frac{2}{5}-1\right)+\frac{9}{5}=3\times\frac{2}{5}+3\times(-1)+\frac{9}{5}=\frac{6}{5}-3+\frac{9}{5}=\frac{6}{5}-\frac{3\times}{1\times5}+\frac{9}{5}=\frac{6+9-15}{5}=\frac{0}{5}=0$$

$$C=\frac{2}{5}\div\frac{4}{5}\times2-3=\frac{2}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{4}\times2-3=\frac{4}{4}-3=1-3=-2$$

تمرين 2 :

أنشر و بسط مايلي :

$$A=2a(-3a+4)=2a\times(-3a)+2a\times4=-6a^2+8a$$

$$B=-3x[4-2x-3(x-1)]=-3x[4-2x-3\times x-3\times(-1)]$$

$$=-3x(4-2x-3x+3)=-3x(7-5x)=-3x\times7-3x\times(-5x)=-21x+15x^2$$

$$C=(3x-4)(5x-2)=3x\times5x+3x\times(-2)-4\times5x-4\times-2$$

$$=15x^2-6x-20x+8=15x^2-26x+8$$

$$D=(-5x+3)(2x-4)=-5x\times2x-5x\times-4+3\times2x+3\times-4$$

$$=-10x^2+20x+6x-12=-10x^2+26x-12$$

تمرين 3 :

عمل مايلي :

$$A=6x^2-18x=6x\times x-3\times6\times x=6x(x-3)$$

$$B=-2x(x-3)+6x(x-3)=(x-3)(-2x+6x)$$

$$=4x(x-3)$$

$$C=(2x+3)(x-5)-(3x-1)(x-5)$$

$$=(x-5)(2x+3-(3x-1))$$

$$=(x-5)(2x+3-3x+1)$$

$$=(x-5)(-x+4)$$

$$D=(3x-1)^2+(2x-3)(3x-1)$$

$$=(3x-1)(3x-1+2x-3)$$

$$=(3x-1)(5x-4)$$

تمرين 4 :

1) أتمم الفراغ بما يناسب :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b^2)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; $(x+6)^2 = x^2 + 2 \times x \times 6 + 36$

$(3-y)^2 = 9 - 2 \times 3 \times y + y^2$; $x^2 - 81 = (x+9)(x-9)$

2) أنشر وبسط مايلي :

$A=(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

$B=(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$

$C = (x-6)(x+6)=x^2 - 6^2=x^2 - 36$

عمل مايلي :

$A = x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x+3)^2$

$B= 4x^2 - 20x + 25 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5 + 5^2 = (2x-5)^2$

$C = x^2 - 25=(x-5)(x+5)$

تعلم توحيد المقام

<u>الحالة 1</u> : نفس المقام.

$$\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6}$$

<u>الحالة 2</u> : توجد علاقة مشتركة في المقام.

توجد علاقة بين 4 و 12 لأن $4 \times 3 = 12$

$$\frac{5}{4} - \frac{9}{12} = \frac{5\times3}{4\times3} - \frac{9}{12} = \frac{15}{12} - \frac{9}{12} = \frac{15-9}{12} = \frac{6}{12}$$

<u>الحالة 3</u> : لا توجد علاقة مشتركة في المقام.

لايوجد شيء نضربه في 3 يعطينا 7

$$\frac{4}{3} + \frac{2}{7} = \frac{7\times4}{21} + \frac{3\times2}{21} = \frac{28}{21} + \frac{6}{21} = \frac{34}{21}$$

سلسلة 2 للنشر والتعميل

تمرين 1 :

1) أزل الأقواس وأحسب مايلي :

A=$-2x-(-3y-4)+(2x-6)$; $B=-(3-5x+y)-(-3-y+2)$

C=$-[-2(6-x+y)+(x-8)]-(-7-x+y)$; $D=3+[-5(y-2)-4]$

2) أحسب مايلي :

A=$5-3\times\frac{6}{9}+7\div\frac{7}{3}$; B $=\frac{3}{2}\times\frac{8}{2}+6-\frac{5}{3}\div\frac{5}{6}-3$

C $=\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{12}-\frac{3}{4}\right)\right]$; D $=\frac{2+\frac{1}{5}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{8}}$

تمرين 2 :

أنشر وبسط مايلي :

A=$\sqrt{5}(x-2+\sqrt{3})$; B $=-3x(2x-4y+5)$

C=$\frac{5}{3}x(-3x+3)-\left(\frac{3}{2}x-2\right)(6x+2)$; D=$(3x-1)(2x+5)-\sqrt{3}(5x-\sqrt{2})$

E=$(2x-5)^2-3(4x-8)$; $F=(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})-(1+2\sqrt{3})^2$

تمرين 3 :

عمل مايلي :

A=x^2+2xy ; $B=3x^2-3x$; $C=x^2-18x+81$

D=$(x+2)^2-(x+2)(3x+1)$; $E=4x-6+(2x-3)(x+5)$

F=$(3x-5)^2-36$; $G=25x^2-\frac{9}{4}$; $H=16x^2-81-3(4x+9)$

حل سلسلة 2 للنشر والتعميل

تمرين 1 :

1) أزل الأقواس وأحسب مايلي :

$$A=-2x-(-3y-4)+(2x-6)=-2x+3y+4+2x-6$$

$$=-\cancel{2}x+\cancel{2}x+3y+4-6=3y-2$$

$$B=-(3-5x+y)-(-3-y+2)=-3+5x-y+3+y-2$$

$$=5x+y-y-3+3-2=5x-2$$

$$C=-[-2(6-x+y)+(x-8)]-(-7-x+y)$$

$$=-[-12+2x-2y+x-8]+7+x-y$$

$$=12-2x+2y-x+8+7+x-y=-2x+y+27$$

$$D=3+[-5(y-2)-4]=3+[-5y+10-4]$$

$$=3-5y+10-4=-5y+9$$

2) أحسب مايلي :

$$A=5-3\times\frac{6}{9}+7\div\frac{7}{3}=5-\frac{3\times6}{9}+\cancel{7}\times\frac{3}{\cancel{7}}=5-\frac{18}{9}+3=5-2+3=6$$

$$B=\frac{3}{2}\times\frac{8}{2}+6-\frac{5}{3}\div\frac{5}{6}-3=\frac{24}{4}+6-\frac{\cancel{5}}{3}\times\frac{6}{\cancel{5}}-3$$

$$=6+6-\frac{6}{3}-3=12-2-3=12-5=7$$

$$C=\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{12}-\frac{3}{4}\right)\right]=\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{12}-\frac{3\times3}{4\times3}\right)\right]=\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{5}{12}-\frac{9}{12}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}-\left(\frac{5-9}{12}\right)\right]=\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{4}{12}\right)\right]=\frac{3}{2}-\left[\frac{2}{3}+\frac{4}{12}\right]$$

$1=\frac{1}{1}$

$$=\frac{3}{2}-\left[\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{4}{12}\right]=\frac{3}{2}-\left(\frac{8}{12}+\frac{4}{12}\right)=\frac{3}{2}-\frac{12}{12}=\frac{3}{2}-1$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1\times2}{1\times2}=\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$D=\frac{2+\frac{1}{5}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{8}}=\frac{\frac{2\times5}{1\times5}+\frac{1}{5}}{\frac{3\times4}{2\times4}-\frac{2}{8}}=\frac{\frac{10}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{12}{8}-\frac{2}{8}}=\frac{\frac{11}{5}}{\frac{10}{8}}=\frac{11}{5}\times\frac{8}{10}=\frac{88}{50}$$

تمرين 2 :

أنشر وبسط مايلي : يمكن ضرب $\sqrt{5}$ في $\sqrt{3}$ لتعطي $\sqrt{15}$

$$A=\sqrt{5}(x-2+\sqrt{3})=\sqrt{5}x-2\sqrt{5}+\sqrt{15}$$

$$B=-3x(2x-4y+5)=-6x^2+12xy-15x$$

$$C=\frac{5}{3}x(-3x+3)-\left(\frac{3}{2}x-2\right)(6x+2)$$

$$=\frac{5}{3}x\times(-3x)+\frac{5}{3}x\times 3-\left(\frac{3}{2}x\times 6x+\frac{3}{2}x\times 2-2\times 6x-2\times 2\right)$$

$$=-5x^2+5x-\left(\frac{18}{2}x^2+3x-12x-4\right)$$

$$=-5x^2+5x-9x^2-3x+12x+4$$

$$=-5x^2-9x^2+5x-3x+12x+4$$

$$=-14x^2+14x+4$$

$$D=(3x-1)(2x+5)-\sqrt{3}(5x-\sqrt{2})$$

$$=3x\times 2x+3x\times 5-1\times 2x-1\times 5-\sqrt{3}\times 5x-\sqrt{3}\times -\sqrt{2}$$

$$=6x^2+15x-2x-5-5\sqrt{3}x+\sqrt{6}$$

$$=6x^2+15x-2x-5\sqrt{3}x-5+\sqrt{6}$$

$$=6x^2+13x-5\sqrt{3}x-5+\sqrt{6}$$

$$E=(2x-5)^2-3(4x-8)=(2x)^2-2\times 2x\times 5+5^2-12x+24$$

$$=4x^2-20x+25-12x+24=4x^2-32x+49$$

$$F=(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})-(1+2\sqrt{3})^2=3^2-\sqrt{5}^2-\left(1^2+2\times 1\times 2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2\right)$$

$$=9-5-\left(1+4\sqrt{3}+2^2\sqrt{3}^2\right)=4-(1+4\sqrt{3}+12)=4-(13+4\sqrt{3})$$

$$=4-13-4\sqrt{3}=-9+4\sqrt{3}$$

تمرين 3 :

عمل مايلي :

$$A=x^2+2xy=x\times x+2xy=x(x+2y)$$

$$B=3x^2-3x=3x\times x-3x\times 1=3x(x-1)$$

$$C=x^2-18x+81=x^2-2\times x\times 9+9^2=(x-9)^2$$

$$D=(x+2)^2-(x+2)(3x+1)=(x+2)(x+2)-(x+2)(3x+1)$$

$= (x+2)[(x+2)-(3x+1)] = (x+2)[x+2-3x-1]$

$= (x+2)(-2x+1)$

$E = 4x-6+(2x-3)(x+5) = 2(2x-3)+(2x-3)(x+5)$

$= (2x-3)(2+x+5) = (2x-3)(x+7)$

$F=(3x-5)^2-36 = (3x-5)^2-6^2 = (3x-5+6)(3x-5-6)$

$= (3x+1)(3x-11)$

متطابقة رقم 3

$G = 25x^2-\frac{9}{4} = (5x)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(5x-\frac{3}{2}\right)\left(5x+\frac{3}{2}\right)$

$H = 16x^2-81-3(4x+9) = (4x)^2-9^2-3(4x+9)$

$= (4x-9)(4x+9)-3(4x+9) = (4x+9)(4x-9-3) = (4x+9)(4x-12)$

تذكر أن : بحيث كل من **b** و **d** تخالف 0

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\times d+c\times b}{b\times d}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d-c\times b}{b\times d}$$

سلسلة 1 للقوى

تمرين 1 :

أحسب مايلي :

$3^3 + 5^2 = \cdots$

$(4 \times 2)^2 - 3 = \cdots$

$5^2 \times 2 + 4 = \cdots$

$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = \cdots \times \ldots$

$3x \times 3x \times 3x \times 3x = \cdots \times \ldots$

$-8^2 + 1 \times 4 = \cdots$

تمرين 2 :

إملأ الفراغ بالعدد المناسب :

$5^3 \times 5^{\cdots} = 5^6$

$8^3 \times \ldots^4 = 8^7$

$\frac{3^6}{3^{\cdots}} = 3^8$

$(3^2)^{\cdots} = 3^{10}$

$5^{\cdots} = \frac{1}{5^2}$

$7^2 \times 3^2 = 21^{\cdots}$

تمرين 3 :

أكتب باستخدام $<$ أو $>$ أو $=$ العبارات الآتية :

$4^6 \ldots 4^3 \times 4^3$; $36 \ldots 6^2 \times 6^2$; $5^{16} \ldots 5^8 \times 5^2$

تمرين 4 :

- أذكر ثلاث طرق مختلفة لكتابة 4^{12} كحاصل ضرب قوتين
- فسر لماذا لايمكنك كتابة $5^3 \times 7^9$ على صورة $(35)^{12}$
- فسر لماذا 5^0 تساوي 1

تمرين 5 :

أوجد قيمة n :

$60000 = 6 \times 10^n$

$56100 = n \times 10^4$

$0{,}000357 = n \times 10^4$

$0{,}000056 = 5{,}6 \times 10^n$

تمرين 6 :

أكتب الأعداد الآتية بالكتابة العلمية :

0,000006 ; 0,000027 ; 267526 ; 340065 ; 17200 ; 4800

- يبلغ عدد سكان أمريكا أكثر من 320000000 نسمة . أكتب هذا العدد بالكتابة العلمية .

حل سلسلة 1 للقوى

تمرين 1 :

أحسب مايلي :

$\mathbf{3^3 + 5^2 = \cdots}$

$3^3 + 5^2 = 27 + 25 = 52$

$\mathbf{(4 \times 2)^2 - 3 = \cdots}$

$(4 \times 2)^2 - 3 = 64 - 3 = 61$

$\mathbf{5^2 \times 2 + 4 = \cdots}$

$5^2 \times 2 + 4 = 50 + 4 = 54$

$\mathbf{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = \cdots \times \ldots}$

$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^4$

$\mathbf{3x \times 3x \times 3x \times 3x = \cdots \times \ldots}$

$3x \times 3x \times 3x \times 3x = 3^4x^4 = 81x^4$

$\mathbf{-8^2 + 1 \times 4 = \cdots}$

$-8^2 + 1 \times 4 = -64 + 4 = -60$

تمرين 2 :

إملأ الفراغ بالعدد المناسب :

$\mathbf{5^3 \times 5^{\cdots} = 5^6}$

$5^3 \times 5^3 = 5^6$

$\mathbf{8^3 \times \ldots^4 = 8^7}$

$8^3 \times 8^4 = 8^7$

$\mathbf{\frac{3^6}{3^{\cdots}} = 3^8}$

$\frac{3^6}{3^{-2}} = 3^8$

$\mathbf{(3^2)^{\cdots} = 3^{10}}$

$(3^2)^5 = 3^{10}$

$\mathbf{5^{\cdots} = \frac{1}{5^2}}$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$

$\mathbf{7^2 \times 3^2 = 21^{\cdots}}$

$7^2 \times 3^2 = 21^2$

تمرين 3 :

أكتب باستخدام < أو > أو = العبارات الآتية :

$\mathbf{5^{16} > 5^8 \times 5^2}$; $36 < \mathbf{6^2 \times 6^2}$; $\mathbf{4^6 = 4^3 \times 4^3}$

لأن $4^3 \times 4^3 = 4^{3+3} = 4^6$; $6^2 \times 6^2 = (6 \times 6)^2 = 36^2$; $5^8 \times 5^2 = 5^{8+2} = 5^{10}$

تمرين 4 :

- أذكر ثلاث طرق مختلفة لكتابة $\mathbf{4^{12}}$

$$\mathbf{4^{12}} = (4^3)^4 = 4^6 \times 4^6 = 2^{12} \times 2^{12}$$

- فسر لماذا لايمكنك كتابة $5^3 \times 7^9$ على صورة $(35)^{12}$

لأن الأساسان مختلفان و كذلك الأسان مختلفان

- فسر لماذا $\mathbf{5^0}$ تساوي 1

$$\mathbf{5^0} = 5^{1-1} = 5^1 \times 5^{-1} = 5 \times \frac{1}{5} = 1$$

تمرين 5 :

أوجد قيمة n :

$\mathbf{60000 = 6 \times 10^n}$

$60000 = 6 \times 10^4$

$\mathbf{56100 = n \times 10^4}$

$56100 = 5{,}61 \times 10^4$

$\mathbf{0{,}000357 = n \times 10^4}$

$0{,}000357 = 3{,}57 \times 10^4$

$\mathbf{0{,}000056 = 5{,}6 \times 10^n}$

$0{,}000056 = 5{,}6 \times 10^5$

تمرين 6 :

أكتب الأعداد الآتية بالكتابة العلمية :

4800 ; 17200 ; 340065 ; 267526 ; 0,000027 ; 0,000006

$\mathbf{0{,}000006} = 6 \times 10^{-6}$

$\mathbf{0{,}000027} = 2{,}7 \times 10^{-5}$

$\mathbf{267536} = 2{,}67536 \times 10^5$

$\mathbf{340065} = 3{,}40065 \times 10^5$

$\mathbf{17200} = 1{,}72 \times 10^4$

$\mathbf{4800} = 4{,}8 \times 10^3$

- يبلغ عدد سكان أمريكا سنة 2015 أكثر من **320000000** نسمة. أكتب هذا العدد بالكتابة العلمية

$\mathbf{320\ 000\ 000} = 3{,}2 \times 10^8$

سلسلة 2 للقوى

تمرين 1 :

أكتب على شكل قوة مايلي :

$A = x^2 \times x^{-6}$

$B = x^4 \times x^{-6} \times x^2$

$C = (x^{-2})^2$

$D = (x^2 \times x^{-3})^3$

$E = 3x^2 \times y^2$

$F = (3x)^2 \times y^2$

$G = \left(\frac{x^3}{x^{-2}}\right)^2$

$H = \frac{x^2 \times x^4}{(y^2)^3}$

تمرين 2 :

بسط مايلي :

$A = (a^2b^3)^2a^{-4}b^{-6}$

$B = \frac{8a^4 \times a^{10} \times a^{-5}}{a^6 \times (a^2)^3 \times 2a^{-3}}$

$C = \frac{6x^4+9x^2}{3x^2}$

$D = \frac{6x^3+10x^4-2x^3}{2x^2}$

www.hsaina.com

تمرين 3 :

أحسب مايلي :

$A = (-5)^2 - 5^2$

$B = \frac{3^2 \times 27}{3^5 \times 3}$

$C = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{-2}$

$D = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - 2 \times 3^2 + 25^0$

تمرين 4 :

إختصر وبسط مايلي :

$A = \frac{9^n \times 3^{n+2}}{27^n}$

$B = \frac{5^{2n} \times 36^n}{30^{2n}}$

$C = \frac{9^{n-1} \times 4^n}{6^{2n}}$

$D = \frac{8^n \times 27^{n+1}}{(3\sqrt{3})^{2n} \times (2\sqrt{2})^{2n}}$

تمرين 5 :

بسط مايلي :

$A = 0{,}03 \times 0{,}0002$

$B = 0{,}006^2 + 0{,}02^3$

$C = 5 \times 0{,}009 \times 10^6$

$D = ((0{,}000003)^2)^2 \times \frac{1}{81}$

$E = \frac{10^2-1}{33}$

$F = \frac{0{,}00009^3 \times 4 \times 10^{-5}}{0{,}0018^2 \times 0{,}0003^4}$

تمرين 6 :

بسط مايلي :

$$A = 30000^2 \times 0{,}005 \times 10^{-2} \qquad B = \frac{18\times\left(10^2\right)^{-3}\times 10^6}{3\times 10^4\times 10^8}$$

$$C = \frac{\left(10^3\right)^2\times 10^{-6}\times 0{,}0001}{0{,}001^3\times 10000} \qquad D = \frac{0{,}002\times 10^{-5}\times\left(3\times 10^{-1}\right)^{-3}}{2\times 10^{-8}\times 27^{-2}}$$

تمرين 7 :

- ♥ يقع القمر على بعد 380 000 km من الأرض .
  أكتب المسافة بالكتابة العلمية ؟
- ♥ ذرة الهيدروجين كتلتها $m=0{,}00017\times 10^{-20} g$.
  أكتب هذه الكتلة بالكتابة العلمية ؟
- ♥ سرعة الضوء هي $V = 300\ 000\ 000\ m/s$.
  أكتب هذا العدد بالكتابة العلمية ؟
- ♥ ترمش العين البشرية حوالي 4×10^6 مرة في السنة . فكم مرة تقريباً,رمشت عين شخص عمره 14 سنة .أكتب إجابتك بالكتابة العلمية ؟

تمرين 8 :

www.salma.com

الكتابة العلمية L'écriture scientifique	البعد عن الشمس بالكيلومتر Distance au soleil par km	الكوكب la planète
.....	57 900 000	Mercure عطارد
.....	108 000 000	Vénus الزهرة
.....	149 500 000	Terre الأرض
.....	228 000 000	Mars المريخ
.....	778 300 000	Jupiter المشتري
.....	1 427 000 000	Saturne زحل
.....	2 871 000 000	Uranus أورانوس
.....	4 497 000 000	Neptune نبتون
.....	5 913 500 000	Pluto بلوتو

حل سلسلة 2 للقوى

تمرين 1 :

أكتب على شكل قوة مايلي :

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} \times \boldsymbol{x}^{\mathbf{-6}} = x^{2-6} = x^{-4}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{4}} \times \boldsymbol{x}^{\mathbf{-6}} \times \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} = x^{4-6+2} = x^{0} = 1$$

$$\mathbf{C} = (\mathbf{x}^{\mathbf{-2}})^{\mathbf{2}} = x^{-2\times 2} = x^{-4}$$

$$\mathbf{D} = (\mathbf{x}^{\mathbf{2}} \times \mathbf{x}^{\mathbf{-3}})^{\mathbf{3}} = (x^{2-3})^{3} = (x^{-1})^{3} = x^{-1\times 3} = x^{-3}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{3}\mathbf{x}^{\mathbf{2}} \times \mathbf{y}^{\mathbf{2}} = \sqrt{3}^{2} x^{2} y^{2} = \left(\sqrt{3}xy\right)^{2}$$

$$\mathbf{F} = (\mathbf{3x})^{\mathbf{2}} \times \mathbf{y}^{\mathbf{2}} = (3xy)^{2}$$

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\mathbf{x}^{\mathbf{3}}}{\mathbf{x}^{\mathbf{-2}}}\right)^{\mathbf{2}} = \left(x^{3-(-2)}\right)^{2} = (x^{3+2})^{2} = (x^{5})^{2} = x^{5\times 2} = x^{10}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{2}}\times\mathbf{x}^{\mathbf{4}}}{(\mathbf{y}^{\mathbf{2}})^{\mathbf{3}}} = \frac{x^{2+4}}{y^{2\times 3}} = \frac{x^{6}}{y^{6}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{6}$$

تمرين 2 :

بسط مايلي :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}^{\mathbf{2}}\mathbf{b}^{\mathbf{3}})^{\mathbf{2}}\mathbf{a}^{\mathbf{-4}}\mathbf{b}^{\mathbf{-6}} = (a^{2})^{2}(b^{3})^{2}a^{-4}b^{-6} = a^{4}b^{6}a^{-4}b^{-6}$$
$$= a^{4-4}b^{6-6} = a^{0} \times b^{0} = 1 \times 1 = 1$$

$$\mathrm{B} = \frac{\mathbf{8a^4\times a^{10}\times a^{-5}}}{\mathbf{a^6\times(a^2)^3\times 2a^{-3}}} = \frac{8a^{4}a^{10}a^{-5}}{2a^{6}a^{6}a^{-3}} = 4a^{4}a^{10}a^{-5}a^{-6}a^{-6}a^{3}$$

$$= 4a^{4+10-5-6-6+3} = 4 \times a^{0} = 4 \times 1 = 4$$

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{6x^4+9x^2}}{\mathbf{3x^2}} = \frac{6x^{4}}{3x^{2}} + \frac{9\cancel{x^{2}}}{3\cancel{x^{2}}} = 2x^{4-2} + 3 = 2x^{2} + 3$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{6x^3+10x^4-2x^3}}{\mathbf{2x^2}} = \frac{6x^{3}}{2x^{2}} + \frac{10x^{4}}{2x^{2}} - \frac{2x^{3}}{2x^{2}} = 3x^{3-2} + 5x^{4-2} - x^{3-2}$$
$$= 3x^{1} + 5x^{2} - x^{1} = 3x - x + 5x^{2} = 5x^{2} + 2x$$

تمرين 3 :

أحسب مايلي :

$$\mathbf{A} = (\mathbf{-5})^{\mathbf{2}} - \mathbf{5}^{\mathbf{2}} = (-5 \times -5) - (5 \times 5) = 25 - 25 = 0$$

$$B = \frac{3^2\times 27}{3^5\times 3} = \frac{3^2\times 3^3}{3^5\times 3^1} = \frac{3^{2+3}}{3^{5+1}} = \frac{3^5}{3^6} = 3^{5-6} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$C = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2\times -2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$$

$$D = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} - 2\times 3^2 + 25^0 = \left(\frac{3}{1}\right)^3 - 2\times 9 + 1 = 27 - 18 + 1 = 10$$

تمرين 4 :

إختصر وبسط مايلي :

$$A = \frac{9^n\times 3^{n+2}}{27^n} = \frac{(3^2)^n\times 3^{n+2}}{(3^3)^n} = \frac{3^{2n}\times 3^{n+2}}{3^{3n}}$$

$$= 3^{2n}\times 3^{n+2}\times 3^{-3n} = 3^{2n+n+2-3n} = 3^2 = 9$$

$$B = \frac{5^{2n}\times 36^n}{30^{2n}} = \frac{5^{2n}\times (6^2)^n}{(5\times 6)^{2n}} = \frac{5^{2n}\times 6^{2n}}{5^{2n}\times 6^{2n}} = 1$$

$$C = \frac{9^{n-1}\times 4^n}{6^{2n}} = \frac{(3^2)^{n-1}\times (2^2)^n}{(3\times 2)^{2n}} = \frac{3^{2\times(n-1)}\times \cancel{2^{2n}}}{3^{2n}\times \cancel{2^{2n}}}$$

$$= \frac{3^{2n-2}}{3^{2n}} = 3^{2n-2-2n} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$D = \frac{8^n\times 27^{n+1}}{(3\sqrt{3})^{2n}\times (2\sqrt{2})^{2n}} = \frac{(2^3)^n\times (3^3)^{n+1}}{3^{2n}\times \sqrt{3}^{2n}\times 2^{2n}\times \sqrt{2}^{2n}} = \frac{2^{3n}\times 3^{3\times(n+1)}}{3^{2n}\times 3^n\times 2^{2n}\times 2^n}$$

$$= \frac{2^{3n}\times 3^{3n+3}}{2^{2n+n}\times 3^{2n+n}} = \frac{\cancel{2^{3n}}\times 3^{3n+3}}{\cancel{2^{3n}}\times 3^{3n}} = 3^{3n+3-3n} = 3^3 = 27$$

تمرين 5 :

بسط مايلي :

$$A = 0,03\times 0,0002 = 3\times 10^{-2}\times 2\times 10^{-4} = 6\times 10^{-2-4} = 6\times 10^{-6}$$

$$B = 0,006^2 + 0,02^3 = (6\times 10^{-3})^2 + (2\times 10^{-2})^3$$

$$= 6^2\times 10^{-3\times 2} + 2^3\times 10^{-2\times 3} = 36\times 10^{-6} + 8\times 10^{-6}$$

$$= 10^{-6}\times (36+8)$$

$$C = 5\times 0,009\times 10^6 = 5\times 9\times 10^{-3}\times 10^6 = 45\times 10^{-3+6} = 45\times 10^3$$

$$D = ((0,000003)^2)^2\times \frac{1}{81} = ((3\times 10^{-6})^2)^2\times \frac{1}{81} = (3\times 10^{-6})^4\times \frac{1}{81}$$

$$= 3^4\times (10^{-6})^4\times \frac{1}{81} = 81\times 10^{-24}\times \frac{1}{81} = 10^{-24}$$

$$E = \frac{10^2-1}{33} = \frac{100-1}{33} = \frac{99}{33} = \frac{9\times 11}{3\times 11} = 3$$

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{0{,}00009^3 \times 4 \times 10^{-5}}}{\mathbf{0{,}0018^2 \times 0{,}0003^4}} = \frac{(9\times10^{-5})^3 \times 4\times10^{-5}}{(18\times10^{-4})^2 \times (3\times10^{-4})^4}$$

$$= \frac{9^3\times10^{-5\times3}\times4\times10^{-5}}{18^2\times10^{-4\times2}\times3^4\times10^{-4\times4}} = \frac{(9)^3\times10^{-15}\times4\times10^{-5}}{(9\times2)^2\times10^{-8}\times3^4\times10^{-16}}$$

$$= \frac{9^3\times10^{-15}\times\cancel{4}\times10^{-5}}{9^2\times\cancel{2^2}\times10^{-8}\times(3^2)^2\times10^{-16}} = \frac{9^3\times10^{-15-5}}{9^2\times9^2\times10^{-8}\times10^{-16}}$$

$$= \frac{9^3\times10^{-20}}{9^{2+2}\times10^{-8-16}} = \frac{9^3\times10^{-20}}{9^4\times10^{-24}} = 9^{3-4}\times10^{-20-24}$$

$$= 9^{-1}\times10^{-20+24} = \frac{1}{9}\times10^4$$

تمرين 6 :

بسط مايلي :

$$\mathbf{A = 30000^2 \times 0{,}005 \times 10^{-2}} = (3\times10^4)^2\times5\times10^{-3}\times10^{-2}$$

$$= 9\times10^8\times5\times10^{-3}\times10^{-2} = 45\times10^{8-3-2} = 45\times10^3$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{18\times(10^2)^{-3}\times10^6}}{\mathbf{3\times10^4\times10^8}} = \frac{6\times10^{-6}\times10^6}{10^4\times10^8} = 6\times10^{-6}\times10^6\times10^{-4}\times10^{-8}$$

$$= 6\times10^{-6+6-4-8} = 6\times10^{-12}$$

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{(10^3)^2\times10^{-6}\times0{,}0001}}{\mathbf{0{,}001^3\times10000}} = \frac{10^6\times10^{-6}\times10^{-4}}{(10^{-3})^3\times10^4} = \frac{10^{6-6-4}}{10^{-9+4}}$$

$$= \frac{10^{-4}}{10^{-5}} = 10^{-4-(-5)} = 10^{-4+5} = 10^1 = 10$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{0{,}002\times10^{-5}\times(3\times10^{-1})^{-3}}}{\mathbf{2\times10^{-8}\times27^{-2}}} = \frac{2\times10^{-3}\times10^{-5}\times3^{-3}\times10^{-1\times-3}}{2\times10^{-8}\times(3^3)^{-2}} = \frac{3^{-3}\times10^{-3-5+3}}{3^{-6}\times10^{-8-6}}$$

$$= \frac{3^{-3}\times10^{-5}}{3^{-6}\times10^{-14}} = 3^{-3-6}\times10^{-5-14} = 3^{-3+6}\times10^{-5+14} = 3^3\times10^9$$

$$= 27\times10^9$$

تمرين 7 :

♥ يقع القمر على بعد 380 000 km من الأرض .
أكتب المسافة بالكتابة العلمية ؟

الجواب هو : $380\,000\ km = 3{,}8\times10^5\ km$

♥ ذرة الهيدروجين كتلتها $m=0{,}00017\times10^{-20}g$.
أكتب هذه الكتلة بالكتابة العلمية ؟

الجواب هو : $m = 0{,}00017\times10^{-20} = 1{,}7\times10^{-4}\times10^{-20}$
$= 1{,}7\times10^{-4-20} = 1{,}7\times10^{-24}\ g$

♥ سرعة الضوء هي $V = 300\,000\,000\ m/s$.
أكتب هذا العدد بالكتابة العلمية ؟

الجواب هو : $V = 300\,000\,000\ m/s = 3 \times 10^8\ m/s$

♥ ترمش العين البشرية حوالي 4×10^6 مرة في السنة . فكم مرة تقريباً,رمشت عين شخص عمره 14 سنة .أكتب إجابتك بالكتابة العلمية ؟

الجواب هو : $14 \times 4 \times 10^6 = 56 \times 10^6 = 5{,}6 \times 10^7$ مرة

تمرين 8 :

الكتابة العلمية L'écriture scientifique	البعد عن الشمس بالكيلومتر Distance au soleil par km	الكوكب la planète
$5{,}79 \times 10^7$	57 900 000	عطارد Mercure
$1{,}08 \times 10^8$	108 000 000	الزهرة Vénus
$1{,}495 \times 10^8$	149 500 000	الأرض Terre
$2{,}28 \times 10^8$	228 000 000	المريخ Mars
$7{,}783 \times 10^8$	778 300 000	المشتري Jupiter
$1{,}427 \times 10^9$	1 427 000 000	زحل Saturne
$2{,}871 \times 10^9$	2 871 000 000	أورانوس Uranus
$4{,}497 \times 10^9$	4 497 000 000	نبتون Neptune
$5{,}9135 \times 10^9$	5 913 500 000	بلوتو Pluto

تذكر :

الأس فردي ↓ $(-1)^5 = -1$ و الأس زوجي ↓ $(-1)^4 = 1^4 = 1$

ملاحظة : إذا كان الأساس موجب فإن إشارة الخارج تكون موجبة دائماً مهما كانت إشارة الأس موجبة أو سالبة .

مثال : $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ و $2^3 = 8$ و $(-2)^3 = -8$

الأعداد الزوجية هي التي أرقام أحادها : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8

مثال : 85730 9752 ; 9864 ; 666 ; 98 ; 4 ; 8 ; 2

الأعداد الفردية هي التي أرقام أحادها : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9

مثال : 65781 ; 4643 ; 2965 ; 427 ; 99 ; 3 ; 7 ; 9

سلسلة 3 للقوى

تمرين 1 :

1) بسط مايلي :

$$A = (-3)^8 \times 3^5 \times 3^{-3} \times (-3)^6 \quad ; \quad B = \frac{\left(x^3y^{-2}\right)^{-1}}{x^{-2}y}$$

2) حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث : $2^{12} = 4^{n+3}$

3) نضع $C = \frac{3^3\times(10^4)^2\times5\times10^{-6}}{10^6}$

أ- بين أن : $C = 135 \times 10^{-4}$

ب- أكتب العدد C بالكتابة العلمية .

تمرين 2 :

1) أكتب على شكل قوة مايلي :

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{4} \times \left(\frac{25}{4}\right)^{2}$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-12} \times \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}\right]^{-5}$$

2) أحسب x إذا علمت أن : $x^4 = \frac{16}{81}$

3) أكتب على شكل قوة للعدد 10 مايلي :

$$A = 10^2 \times 10^{-5} \times 10^6$$

$$B = (10^{-3})^2 \times \frac{10^5}{10^{-2}} \times 10^3$$

تمرين 3 :

1) أحسب مايلي :

$$A = \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-1} \quad ; \quad B = \frac{3^2-2^3}{3^{-2}}$$

2) أكتب على شكل قوة للعدد 2 العدد C : $C = \frac{4^{n+1}-4^n}{2^{n+1}+2^n}$

3) نعتبر العددين : $x = 0{,}036 \times 10^{-3}$ و $y = 4000 \times 10^{-8}$

إعط الكتابة العلمية للعددين : $x + y$ و $\frac{x}{y}$

تمرين 4 :

1) قارن 2^{400} و 10^{100}

2) أكتب العدد $\sqrt{10^{-12}}$ على شكل قوة أساسها العدد 10

3) بسط مايلي :

$$A = (a^2 \times b^{-1})^3 \times (a^3 \times b^{-2})^{-4}$$

$$B = \frac{(ab^{-2})^3 \times a^{-3} \times b^{-5}}{(a^{-2}b^2)^{-3} \times (b^3)^{-3}}$$

4) بين أن : $55^2 - 33^2 = 44^2$

5) n عدد صحيح طبيعي , نضع $x = 3^n + 3^{-n}$ و $y = 3^n - 3^{-n}$

- بين أن : $x^2 - y^2 = 4$

6) أكتب $10^{28} - 10^{27}$ كتابة علمية .

حلول سلسلة 3 للقوى

تمرين 1 :

1) بسط مايلي :

$$A = (-3)^8 \times 3^5 \times 3^{-3} \times (-3)^6 = (-3)^{8+6} \times 3^{5-3}$$
$$= (-3)^{14} \times 3^2 = 3^{14} \times 3^2 = 3^{16}$$

$$B = \frac{(x^3y^{-2})^{-1}}{x^{-2}y} = \frac{x^{-3}\times y^2}{x^{-2}\times y} = x^{-3} \times y^2 \times x^2 \times y^{-1}$$
$$= x^{-1} \times y^1 = \frac{y}{x}$$

2) حدد العدد الصحيح الطبيعي n بحيث : $2^{12} = 4^{n+3}$

$$2^{12} = 4^{n+3} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{12} = (2^2)^{n+3} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{12} = 2^{2\times(n+3)}$$

$$2^{12} = 2^{2n+6} \quad \Leftrightarrow \quad 12 = 2n + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 12 - 6 = 2n$$

$$2n = 6 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{6}{2} \quad \Leftrightarrow \quad n = 3$$

3) نضع $C = \frac{3^3\times(10^4)^2\times5\times10^{-6}}{10^6}$

أ- بين أن : $C = 135 \times 10^{-4}$

$$C = \frac{3^3\times(10^4)^2\times5\times10^{-6}}{10^6} = 3^3 \times 10^8 \times 5 \times 10^{-6} \times 10^{-6}$$
$$= 27 \times 5 \times 10^{8-6-6} = 135 \times 10^{-4}$$

ب- أكتب العدد C بالكتابة العلمية .

$$C = 135 \times 10^{-4} = 1{,}35 \times 10^2 \times 10^{-4} = 1{,}35 \times 10^{-2}$$

تمرين 2 :

1) أكتب على شكل قوة مايلي :

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{25}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)^2 \times \left(\frac{25}{4}\right)^2$$
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(\frac{4}{25}\right)^2 \times \left(\frac{25}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{2} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{25}} \times \frac{\cancel{25}}{\cancel{4}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-12} \times \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}\right]^{-5} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-12} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-12+10} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}$$

2) أحسب x إذا علمت أن : $x^4 = \frac{16}{81}$

$$\boldsymbol{x^4 = \frac{16}{81}} \quad \Leftrightarrow \quad x^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

3) أكتب على شكل قوة للعدد 10 مايلي :

$$\mathbf{A} = \mathbf{10^2 \times 10^{-5} \times 10^6} = 10^3$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{10^{-3}})^2 \times \frac{\mathbf{10^5}}{\mathbf{10^{-2}}} \times \mathbf{10^3}$$

$$= 10^{-6} \times 10^5 \times 10^2 \times 10^3$$

$$= 10^{-6+5+2+3} = 10^4$$

تمرين 3 :

1) أحسب مايلي :

$$\mathbf{A} = \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^{-1} = \left[\left(-\frac{5}{1}\right)^{1} + \left(\frac{2}{1}\right)^{3}\right]^{-1} = [-5+8]^{-1}$$

$$= 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{3^2 - 2^3}}{\mathbf{3^{-2}}} = \frac{9-8}{3^{-2}} = 1 \times 3^2 = 9$$

2) أكتب على شكل قوة للعدد 2 العدد C :

$$\mathbf{C} = \frac{\mathbf{4^{n+1} - 4^n}}{\mathbf{2^{n+1} + 2^n}} = \frac{4^n \times 4^1 - 4^n}{2^n \times 2^1 + 2^n} = \frac{4^n(4^1 - 1)}{2^n(2^1 + 1)} = \frac{3 \cancel{\times} 4^n}{3 \cancel{\times} 2^n} = \frac{(2^2)^n}{2^n}$$

$$= \frac{2^{2n}}{2^n} = 2^{2n-n} = 2^n$$

3) نعتبر العددين : $x = 0{,}036 \times 10^{-3}$ و $y = 4000 \times 10^{-8}$

إعط الكتابة العلمية للعددين : $x + y$ و $\frac{x}{y}$

$$\boldsymbol{x + y = 0{,}036 \times 10^{-3} + 4000 \times 10^{-8}}$$

$$= 36 \times 10^{-3} \times 10^{-3} + 40 \times 10^{-2} \times 10^{-8} = 36 \times 10^{-6} + 40 \times 10^{-6}$$

$= 10^{-6}(36+40) = 76 \times 10^{-6} = 7{,}6 \times 10^{1} \times 10^{-6} = 7{,}6 \times 10^{-5}$

$$\frac{x}{y} = \frac{36\times10^{-6}}{40\times10^{-6}} = \frac{\cancel{4}\times9}{\cancel{4}\times10} = 9 \times 10^{-1}$$

تمرين 4 :

1) قارن 2^{400} و 10^{100}

لدينا $2^{400} = (2^4)^{100} = 16^{100}$ وبما أن $16 > 10$ فإن $16^{100} > 10^{100}$

وبالتالي $2^{400} > 10^{100}$

2) أكتب العدد $\sqrt{10^{-12}}$ على شكل قوة أساسها العدد 10

$$\sqrt{\mathbf{10^{-12}}} = \left(\sqrt{10^2}\right)^{-6} = 10^{-6}$$

3) بسط مايلي :

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a^2} \times \boldsymbol{b^{-1}})^3 \times (\boldsymbol{a^3} \times \boldsymbol{b^{-2}})^{-4} = (a^2)^3 \times (b^{-1})^3 \times (a^3)^{-4} \times (b^{-2})^{-4}$$

$$= a^6 \times b^{-3} \times a^{-12} \times b^8 = a^{6-12} \times b^{-3+8} = a^{-6}b^5$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\left(\boldsymbol{ab^{-2}}\right)^{\boldsymbol{3}} \times \boldsymbol{a^{-3}} \times \boldsymbol{b^{-5}}}{\left(\boldsymbol{a^{-2}b^2}\right)^{\boldsymbol{-3}} \times \left(\boldsymbol{b^3}\right)^{\boldsymbol{-3}}} = \frac{a^3 \times \left(b^{-2}\right)^3 \times a^{-3} \times b^{-5}}{\left(a^{-2}\right)^{-3} \times \left(b^2\right)^{-3} \times b^{-9}} = \frac{a^3 \times \cancel{b^{-6}} \times a^{-3} \times b^{-5}}{a^6 \times \cancel{b^{-6}} \times b^{-9}}$$

$$= a^3 \times a^{-3} \times b^{-5} \times a^{-6} \times b^9 = a^{3-3-6} \times b^{-5+9} = a^{-6}b^4$$

4) بين أن : $55^2 - 33^2 = 44^2$

$$\mathbf{55^2 - 33^2} = (5 \times 11)^2 - (3 \times 11)^2 = 5^2 \times 11^2 - 3^2 \times 11^2 = 11^2 \times (5^2 - 3^2) = 11^2 \times 16 = 11^2 \times 4^2 = (11 \times 4)^2 = 44^2$$

5) n عدد صحيح طبيعي , نضع $x = 3^n + 3^{-n}$ و $y = 3^n - 3^{-n}$

- بين أن : $x^2 - y^2 = 4$

$$\boldsymbol{x^2 - y^2} = (x - y) \times (x + y)$$

$$= \left(3^n + 3^{-n} - (3^n - 3^{-n})\right) \times (3^n + 3^{-n} + 3^n - 3^{-n})$$

$$= (3^n + 3^{-n} - 3^n + 3^{-n}) \times (3^n + 3^n) = (2 \times 3^{-n}) \times (2 \times 3^n)$$

$$= 4 \times 3^{-n+n} = 4 \times 3^0 = 4 \times 1 = 4$$

6) أكتب $10^{28} - 10^{27}$ كتابة علمية .

$$\mathbf{10^{28} - 10^{27}} = 10^{27} \times 10^1 - 10^{27} = 10^{27} \times (10 - 1) = 9 \times 10^{27}$$

تمارين

الجذور المربعة

المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي

من إعداد الأستاذ : المهدي عنيس

تمرين ①:

1) – أكتب ما يلي بدون جذر مربع :

$$\frac{\sqrt{(-18)^2}}{\sqrt{81}} \quad ;; \quad \sqrt{144} \quad ;; \quad \left(\sqrt{0,001}\right)^2 \quad ;; \quad \sqrt{\left(\frac{-5}{3}\right)^2} \quad ;; \quad \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$\left(-\sqrt{\sqrt{9}}\right)^2 \quad ;; \quad \sqrt{(-1,5)^2} \quad ;; \quad \frac{-\sqrt{225}}{\sqrt{196}}$$

2) – بسط ما يلي :

$$B=\sqrt{100}\times\frac{-2}{3\sqrt{(-4)^2}}+\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}\div\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2} \quad ;; \quad A=\frac{-5\sqrt{9}}{3}+\left(\sqrt{-2}\right)^2-\frac{6}{\sqrt{81}}$$

$$E=\sqrt{2^2+3^2+6^2} \quad ;; \quad D=\sqrt{81}-\sqrt{2^2\times3^2+4^2-3} \quad ;; \quad C=\sqrt{\frac{\sqrt{81}+\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt{9}}}$$

3) – حل المعادلات الآتية : $x^2=25$;; $x^2+5=11$;; $x^2=-7$;; $x^2-3=-7$

تمرين ②:

1) – أكتب ما يلي على شكل $a\sqrt{b}$ ، بحيث : a و b عددان حقيقيان موجبان و b أصغر ما يمكن :

$$\sqrt{48} \quad ;; \quad \sqrt{\frac{32}{45}} \quad ;; \quad \frac{1}{2}\sqrt{72} \quad ;; \quad \sqrt{288}\times\sqrt{75} \quad ;; \quad \sqrt{3^2\times5^2\times7}$$

2) – أحسب ثم بسط ما يلي :

$$a=\sqrt{7}\times\sqrt{\frac{25}{7}}+\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} \quad ;; \quad b=\sqrt{3}\times\sqrt{27}-\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} \quad ;; \quad c=-\sqrt{7}+\frac{7+\sqrt{35}}{\sqrt{7}}$$

3) – بسط ما يلي :

$$d=2\sqrt{8}-\sqrt{50}+3\sqrt{19} \quad ;; \quad e=\sqrt{99}+3\sqrt{275}-2\sqrt{396} \quad ;; \quad f=\sqrt{\frac{80}{49}}-\sqrt{20}+\sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$g=4\sqrt{125}-2\sqrt{20}-4\sqrt{5} \quad ;; \quad h=\sqrt{\frac{3}{7}}-2\sqrt{\frac{12}{28}}+3\sqrt{\frac{48}{700}}$$

❀ تمرين ③ :

1) – نضع : $x=\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{4}}$ و $y=\frac{9}{2\sqrt{3}}$ و $z=\sqrt{3}+\frac{3}{2\sqrt{3}}$

بين أن : $x=y=z$.

2) – أزل الجذر المربع من المقام :

$\frac{2}{\sqrt{5}}$;; $\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$;; $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$;; $\frac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;; $\frac{\sqrt{3}-1}{1-\sqrt{2}}$

❀ تمرين ④ :

أحسب ما يلي :

$$X=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$Y=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+.....+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

❀ تمرين ⑤ :

1) – نعتبر العدد E بحيث : $E=\frac{5}{\sqrt{3}}+\frac{10}{3+\sqrt{3}}$.

أثبت أن : E عدد صحيح طبيعي.

2) – أ) -- أنشر : $\left(\sqrt{5}+1\right)^2$ ثم $\left(\sqrt{5}-1\right)^2$.

ب) -- استنتج تبسيطا لكل من العددين : $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ ثم $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

ج) - أحسب العدد : $F=\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)^2$.

حلول التمارين

الجذور المربعة

المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي

من إعداد الأستاذ : المهدي عنيس

تمرين ①:

1) –لنكتب ما يلي بدون جذر مربع :

$$\left(-\sqrt{\sqrt{9}}\right)^2=\sqrt{9}=3 \quad ;; \quad \sqrt{(-1,5)^2}=1,5 \quad ;; \quad \frac{-\sqrt{225}}{\sqrt{196}}=\frac{-15}{13} \quad ;; \quad \sqrt{\left(\frac{-5}{3}\right)^2}=\frac{5}{3} \quad ;; \quad \sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{(-18)^2}}{\sqrt{81}}=\frac{18}{9}=2 \quad ;; \quad \sqrt{144}=12 \quad ;; \quad \left(\sqrt{0,001}\right)^2=0,001$$

2) –لنبسط ما يلي :

$$A=\frac{-5\sqrt{9}}{3}+\left(\sqrt{-2}\right)^2-\frac{6}{\sqrt{81}}$$
$$=\frac{-5\times 3}{3}+2-\frac{6}{9}$$
$$=-5+2-\frac{2}{3}$$
$$=-3-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{-9}{3}-\frac{2}{3}$$
$$=\frac{-11}{3}$$

$$B=\sqrt{100}\times\frac{-2}{3\sqrt{(-4)^2}}+\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}}\div\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$
$$=10\times\frac{-2}{3\times 4}+\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}$$
$$=10\times\frac{-2}{12}+\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}$$
$$=10\times\frac{-2}{12}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}$$
$$=10\times\frac{-1}{6}+1$$
$$=5\times\frac{-1}{3}+\frac{3}{3}$$
$$=\frac{-5}{3}+\frac{3}{3}$$
$$=\frac{-2}{3}$$

$$C=\sqrt{\frac{\sqrt{81}+\sqrt{(-3)^2}}{\sqrt{9}}}$$
$$=\sqrt{\frac{9+3}{3}}$$
$$=\sqrt{\frac{12}{3}}$$
$$=\sqrt{4}$$
$$=2$$

$$D=\sqrt{81}-\sqrt{2^2\times 3^2+4^2-3}$$
$$=9-\sqrt{4\times 9+16-3}$$
$$=9-\sqrt{36+16-3}$$
$$=9-\sqrt{49}$$
$$=9-7$$
$$=2$$

$$E=\sqrt{2^2+3^2+6^2}$$
$$=\sqrt{4+9+36}$$
$$=\sqrt{49}$$
$$=7$$

3) – لنحل المعادلات الآتية :

أ) -- المعادلة $x^2 = 25$ تكافئ على التوالي :

$x = \sqrt{25}$ أو $x = -\sqrt{25}$

$x = 5$ $\quad$ $x = -5$

ب) -- المعادلة $x^2 + 5 = 11$ تكافئ على التوالي :

$$x^2 = 11 - 5$$
$$x^2 = 6$$
$$x = \sqrt{6} \text{ أو } x = -\sqrt{6}$$

ج) -- المعادلة $x^2 = -7$ ليس لها حل.

د) -- المعادلة $x^2 - 3 = -7$ تكافئ على التوالي :

$$x^2 = -7 + 3$$
$$= -4$$

ليس لها حل

تمرين ②:

1) – لنكتب ما يلي على شكل $a\sqrt{b}$ ، بحيث : a و b عددان حقيقيان موجبان و b أصغر ما يمكن :

$$\sqrt{48} = \sqrt{4^2 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{32}{45}} = \sqrt{\frac{4^2 \times 2}{3^2 \times 5}} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 \times \frac{2}{5}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\sqrt{288} \times \sqrt{75} = \sqrt{12^2 \times 2} \times \sqrt{5^2 \times 3} = 12\sqrt{2} \times 5\sqrt{3} = 60\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{72} = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 \times 2} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

.....

$$\sqrt{3^2 \times 5^2 \times 7} = 3 \times 5\sqrt{7} = 15\sqrt{7}$$

2) – لنحسب ثم نبسط ما يلي :

$$a = \sqrt{7} \times \sqrt{\frac{25}{7}} + \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{2^2 \times 5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{7} \times \frac{5}{\sqrt{7}} + \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 5 + 2 = 7$$

$$b = \sqrt{3} \times \sqrt{27} - \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3} \times \sqrt{3^2 \times 3} - \frac{\sqrt{3^2 \times 5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3} \times 3\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{3}^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

$$c = -\sqrt{7} + \frac{7 + \sqrt{35}}{\sqrt{7}} = \frac{-\sqrt{7}^2}{\sqrt{7}} + \frac{7 + \sqrt{35}}{\sqrt{7}} = \frac{-7 + 7 + \sqrt{7 \times 5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \sqrt{5}$$

3) – لنبسط ما يلي :

$$d = 2\sqrt{8} - \sqrt{50} + 3\sqrt{19} = 2\sqrt{2^2 \times 2} - \sqrt{5^2 \times 2} + 3\sqrt{19} = 2 \times 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{19} = 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{19} = -\sqrt{2} + 3\sqrt{19}$$

$$e = \sqrt{99} + 3\sqrt{275} - 2\sqrt{396} = \sqrt{3^2 \times 11} + 3\sqrt{5^2 \times 11} - 2\sqrt{6^2 \times 11} = 3\sqrt{11} + 3 \times 5\sqrt{11} - 2 \times 6\sqrt{11} = (3 + 15 - 12)\sqrt{11} = 6\sqrt{11}$$

$$g = 4\sqrt{125} - 2\sqrt{20} - 4\sqrt{5} = 4\sqrt{5^2 \times 5} - 2\sqrt{2^2 \times 5} - 4\sqrt{5} = 4 \times 5\sqrt{5} - 2 \times 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = (20 - 4 - 4)\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

$$h=\sqrt{\frac{3}{7}}-2\sqrt{\frac{12}{28}}+3\sqrt{\frac{48}{700}}$$
$$=\sqrt{\frac{3}{7}}-2\sqrt{\frac{2^2\times3}{2^2\times7}}+3\sqrt{\frac{4^2\times3}{10^2\times7}}$$
$$=\sqrt{\frac{3}{7}}-2\sqrt{\frac{3}{7}}+3\sqrt{\left(\frac{4}{10}\right)^2\times\frac{3}{7}}$$
$$=\sqrt{\frac{3}{7}}-2\sqrt{\frac{3}{7}}+3\times\frac{4}{10}\sqrt{\frac{3}{7}}$$
$$=\sqrt{\frac{3}{7}}-2\sqrt{\frac{3}{7}}+\frac{6}{5}\sqrt{\frac{3}{7}}$$
$$=\left(1-2+\frac{6}{5}\right)\sqrt{\frac{3}{7}}$$
$$=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{7}}$$

;;

$$f=\sqrt{\frac{80}{49}}-\sqrt{20}+\sqrt{\frac{5}{9}}$$
$$=\frac{\sqrt{4^2\times5}}{\sqrt{7^2}}-\sqrt{2^2\times5}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3^2}}$$
$$=\frac{4\sqrt{5}}{7}-2\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$=\frac{12\sqrt{5}}{21}-\frac{42\sqrt{5}}{21}+\frac{7\sqrt{5}}{21}$$
$$=\frac{(12-42+7)\sqrt{5}}{21}$$
$$=\frac{-23\sqrt{5}}{21}$$

❀ تمرين ③

1) – لنبين أن : $x=y=z$.

لدينا :

$$x=\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}$$
$$=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

;;

$$y=\frac{9}{2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{2\sqrt{3}^2}$$
$$=\frac{9\sqrt{3}}{6}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

;;

$$z=\sqrt{3}+\frac{3}{2\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}^2}$$
$$=\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{6}$$
$$=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

و بالتالي فإن : $x=y=z$.

2) – لنزل الجذر المربع من المقام :

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

;;

$$\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{3\sqrt{7}^2}=\frac{5\sqrt{14}}{21}$$

;;

$$\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}=\frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)}=\frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)}{\sqrt{3}^2-2^2}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)}{3-4}=\frac{(1-\sqrt{3})(\sqrt{3}-2)}{-1}$$

❀ تمرين ④ :

لنحسب ما يلي :

$$X = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)} - \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2} - \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}^2}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}$$
$$= \frac{\sqrt{15}+3}{2} - \frac{\sqrt{15}-3}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{15}+3-\sqrt{15}+3}{2}$$
$$= \frac{6}{2} = 3$$

$$Y = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots\dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$
$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}^2-\sqrt{4}^2} + \dots\dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{\sqrt{99}^2-\sqrt{100}^2}$$
$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{3-4} + \dots\dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{99-100}$$
$$= \frac{1-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1} + \dots\dots + \frac{\sqrt{99}-\sqrt{100}}{-1}$$
$$= \frac{1-\cancel{\sqrt{2}}+\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{4}}+\cancel{\sqrt{4}}-\dots\dots-\cancel{\sqrt{99}}+\cancel{\sqrt{99}}-\sqrt{100}}{-1}$$
$$= \frac{1-\sqrt{100}}{-1}$$
$$= \frac{1-10}{-1}$$
$$= \frac{-9}{-1}$$
$$= 9$$

❀ تمرين ⑤ :

1) – لنثبت أن E عددا صحيحا طبيعيا :

$$E = \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{10}{3+\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} + \frac{10\left(3-\sqrt{3}\right)}{3^2-\sqrt{3}^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{30-10\sqrt{3}}{9-3} = \frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{30-10\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{6} + \frac{30-10\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}+30-10\sqrt{3}}{6}$$
$$= \frac{30}{6} = 5$$

إذن E عدد صحيح طبيعي

2) –أ) -- لننشر ما يلي :

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^2=\sqrt{5}^2+2\sqrt{5}+1 \qquad \left(\sqrt{5}-1\right)^2=\sqrt{5}^2-2\sqrt{5}+1$$

$$=5+2\sqrt{5}+1 \qquad ;; \qquad =5-2\sqrt{5}+1$$

$$=6+2\sqrt{5} \qquad =6-2\sqrt{5}$$

ب) -- لنستنتج تبسيطا لكل من العددين : $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$ ثم $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

لدينا :

$$\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}=\sqrt{5}+1 \qquad \text{و} \qquad \sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}=\sqrt{5}-1$$

ج) - لنحسب العدد : $F=\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)^2$.

لدينا :

$$\begin{aligned}
F&=\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}+\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)^2\\
&=\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}+2\times\sqrt{\sqrt{5}-2}\times\sqrt{\sqrt{5}+2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}+2\right)^2}\\
&=\left(\sqrt{5}-2\right)+2\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}+\left(\sqrt{5}+2\right)\\
&=\sqrt{5}-2+2\sqrt{\sqrt{5}^2-2^2}+\sqrt{5}+2\\
&=\sqrt{5}-2+2\sqrt{5-4}+\sqrt{5}+2\\
&=\sqrt{5}-2+2\sqrt{1}+\sqrt{5}+2\\
&=\sqrt{5}-2+2+\sqrt{5}+2\\
&=2\sqrt{5}+2
\end{aligned}$$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة الدار البيضاء الكبرى
نيابة المحمدية

موقع الرياضيات بالثانوي الإعدادي
www.anissmaths.net

تمارين

مبرهنة طاليس

المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي

من إعداد الأستاذ : المهدي عنيس

تمرين ①:

ABC مثلث بحيث :

$AB = 4\,cm$ و $AC = 6\,cm$ و $BC = 5\,cm$.

لتكن M نقطة من الضلع $[AB]$ بحيث : $AM = 1\,cm$.

المستقيم المار من M و الموازي للمستقيم (BC) يقطع المستقيم (AC) في N.

1) – أرسم الشكل.

2) – أحسب المسافتين : AN و MN.

3) – لتكن F نقطة من الضلع $[BC]$ بحيث : $BF = 3,75\,cm$.

أ) -- أتمم الشكل.

ب) -- برهن أن : $(MF) // (AC)$.

تمرين ②:

$ABCD$ متوازي الأضلاع بحيث :

$AB = 8\,cm$ و $AD = 4,5\,cm$ و E نقطة من نصف المستقيم $[DA)$، لا تنتمي إلى $[DA]$

بحيث : $AE = 1,5\,cm$. المستقيم (EC) يقطع المستقيم (AB) في M.

1) – أرسم الشكل.

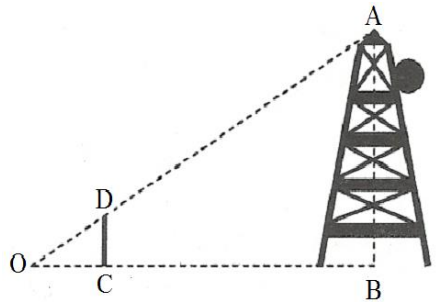
2) – أحسب : MA.

3) – لتكن F نقطة من الضلع $[DC]$ بحيث : $DF = \frac{3}{4}DC$.

أ) -- أتمم الشكل.

ب) -- أثبت أن : $(EC) // (AF)$.

تمرين ③:



نعتبر الشكل جانبه بحيث : $(DC) // (AB)$.

$OC = 2\,cm$ و $BC = 4,8\,cm$ و $DC = 1,6\,cm$

أحسب ارتفاع هذا العمود.

❀ تمرين ④ :

ABC مثلث .

لتكن E نقطة من $[AB]$ بحيث : $AE = \frac{2}{3}AB$.

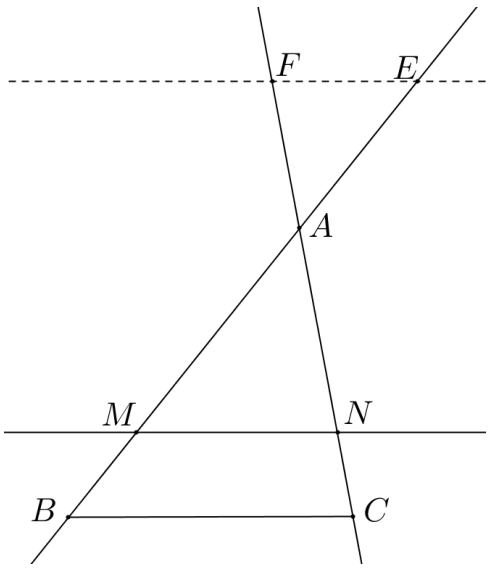
لتكن F نقطة من $[AC]$ بحيث : $CF = \frac{1}{3}CA$.

1) – أرسم شكلا مناسبا .

2) – أ) -- برهن أن : $(BC) // (EF)$.

ب) -- استنتج قيمة النسبة : $\frac{EF}{BC}$.

❀ تمرين ⑤ :



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$(BC) // (MN)$

$AB = 16\,cm$ و $AC = 8\,cm$ و $BM = 4\,cm$.

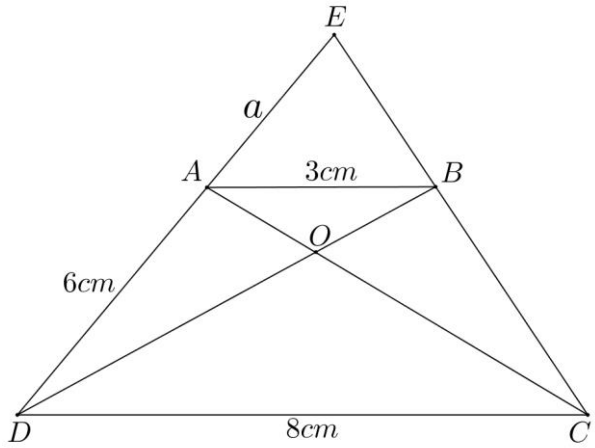
$AE = 4\,cm$ و $AF = 2\,cm$

1) – أ) -- بين أن : $AN = 6\,cm$.

ب) -- أحسب : NC .

2) – أثبت أن : $(BC) // (EF)$.

❀ تمرين ⑥ :



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$.

$AB = 3\,cm$ و $DC = 8\,cm$

$AE = a$ و $AD = 6\,cm$

1) – أ) -- قارن النسبتين : $\frac{OB}{OD}$ و $\frac{AB}{DC}$.

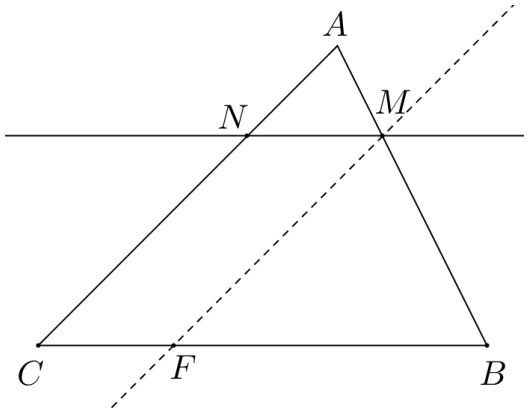
ب) -- استنتج حساب : $\frac{OB}{OD}$.

2) – أحسب قيمة : a .

3) – أثبت أن : $OB \times EC = OD \times EB$.

تمرين ①:

1) – الشكل :



2) – */ حساب المسافة AN :

نعتبر المثلث ABC .

لدينا : $\left.\begin{array}{l} M \in (AB) \\ N \in (AC) \end{array}\right\}$ و

و بما أن : $(BC) // (MN)$

فإن حسب خاصية طاليس المباشرة : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

و منه فإن : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ أي $\frac{1}{4} = \frac{AN}{6}$ يعني أن : $AN = \frac{6}{4}$

إذن : $\boxed{AN = 1,5\ cm}$

*/ حساب المسافة MN :

نعلم أن : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

و منه فإن : $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ أي $\frac{1}{4} = \frac{MN}{5}$ يعني أن : $MN = \frac{5}{4}$

إذن : $\boxed{MN = 1,25\ cm}$

3) – أ) -- أنظر الشكلا.

ب) -- لنبرهن أن : $(MF) // (AC)$.

لدينا : $\frac{BM}{BA} = \frac{3}{4}$ و $\frac{BF}{BC} = \frac{3,75}{5} = \frac{375}{500} = \frac{3}{4}$. إذن : $\frac{BM}{BA} = \frac{BF}{BC}$.

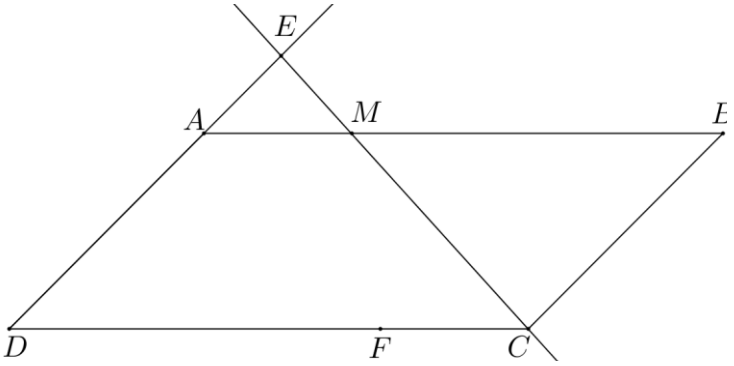
نعتبر المثلث ABC :

لدينا $\left.\begin{array}{l} M \in (AB) \\ F \in (BC) \end{array}\right\}$ و

و بما أن النقط B و M و A ثم النقط B و F و C لها نفس الترتيب بحيث : $\frac{BM}{BA} = \frac{BF}{BC}$

فإن حسب خاصية طاليس العكسية : $(MF) // (AC)$.

❀ تمرين ②:



1)–الشكـل :

2) – حسـاب MA :

✠ لنبين أن : $(DC) // (AM)$.

نعلم أن : $ABCD$ متوازي الأضلاع

إذن : $(DC) // (AB)$

و بما أن $M \in [AB]$ فإن : $(DC) // (AM)$.

لدينا إذن في المثلث EDC :

و $\begin{cases} M \in (EC) \\ A \in (ED) \end{cases}$

و بما أن $(DC) // (AM)$ فإن حسب خاصية طاليس المباشرة : $\frac{EM}{EC} = \frac{EA}{ED} = \frac{MA}{DC}$.

و منه فإن : $\frac{EA}{ED} = \frac{MA}{DC}$ أي $\frac{1,5}{6} = \frac{MA}{8}$ يعني أن : $MA = \frac{8 \times 1,5}{6}$. و بالتالي فإن : $MA = 2\ cm$.

3) –أ) -- أنظر الشكـل.

ب) -- لنثبت أن : $(EC) // (AF)$.

✠ لنبين أن : $\frac{DA}{DE} = \frac{DF}{DC}$.

لدينا : $\frac{DA}{DE} = \frac{4,5}{6} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$. و لدينا : $DF = \frac{3}{4} DC$ يعني أن : $\frac{DF}{DC} = \frac{3}{4}$.

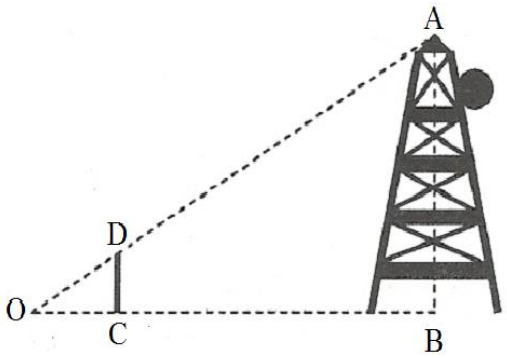
إذن : $\frac{DA}{DE} = \frac{DF}{DC}$.

لدينا إذن في المثلث DEC : و $\begin{cases} A \in (DE) \\ F \in (DC) \end{cases}$

و بما أن النقط D و A و E ثم النقط D و F و C لها نفس الترتيب بحيث : $\frac{DA}{DE} = \frac{DF}{DC}$

فإن حسب خاصية طاليـس العكسية : $(EC) // (AF)$.

❀ تمرين ③:



لنحسب إرتفاع هذا العمـود.

لدينا من خلال الشكـل :

OAB مثلث.

و $\begin{cases} D \in (OA) \\ C \in (OB) \end{cases}$

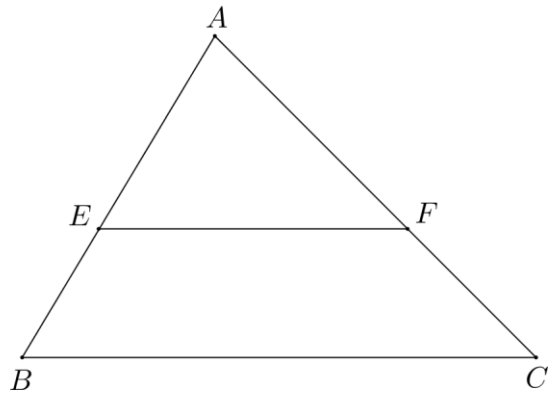
و بما أن : $(DC) // (AB)$

فإن حسب خاصية طاليس المباشرة : $\frac{OD}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{DC}{AB}$

و منه فإن : $\frac{OC}{OB} = \frac{DC}{AB}$ أي $\frac{2}{6,8} = \frac{1,6}{AB}$ يعني أن : $AB = \frac{6,8 \times 1,6}{2}$ و منه فإن : $AB = 5,44\ m$.

و بالتالي فإن إرتفاع العمود هو : $5,44\ m$.

❀ تمرين ④ :



1) – الشكـل :

2) – أ) -- لنبرهن أن : $(BC) // (EF)$.

✠ لنبين أن : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$.

لدينا : $AE=\frac{2}{3}AB$ يعني أن : $\frac{AE}{AB}=\frac{2}{3}$.

$CF=\frac{1}{3}CA$ يعني أن : $\frac{CF}{AC}=\frac{1}{3}$

و منه فإن : $\frac{AC-AF}{AC}=\frac{1}{3}$ أي $\frac{AC}{AC}-\frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}$ و منه فإن : $1-\frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}$

إذن : $\frac{AF}{AC}=1-\frac{1}{3}$ و منه فإن : $\frac{AF}{AC}=\frac{2}{3}$

إذن : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$.

لدينا إذن في المثلث ABC و $\left.\begin{matrix}E\in(AB)\\F\in(AC)\end{matrix}\right\}$

و بما أن النقط A و E و B ثم النقط A و F و C لها نفس الترتيب بحيث : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$

فإن حسب خاصية طاليس العكسية : $(BC) // (EF)$.

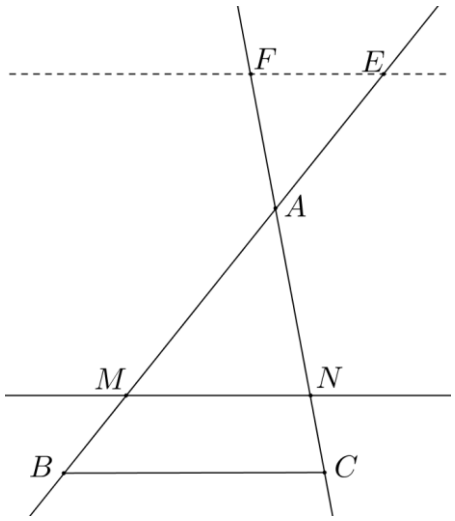
ب) -- لنستنتج قيمة النسبة $\frac{EF}{BC}$.

لدينا إذن في المثلث ABC و $\left.\begin{matrix}E\in(AB)\\F\in(AC)\end{matrix}\right\}$

و بما أن : $(BC) // (EF)$ فإن حسب خاصية طاليس المباشرة : $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$.

و منه فإن : $\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$. و بما أن $\frac{AF}{AC}=\frac{2}{3}$ فإن : $\frac{EF}{BC}=\frac{2}{3}$.

❀ تمرين ⑤ :



1) – أ) -- لنبين أن : $AN=6\,cm$.

لدينا من خلال الشكـل في المثلث ABC :

و $\left.\begin{matrix}M\in(AB)\\N\in(AC)\end{matrix}\right\}$

و بما أن : $(BC) // (MN)$

فإن حسب خاصية طاليس المباشرة : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

و منه فإن : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ أي $\frac{16-4}{16}=\frac{AN}{8}$

يعني أن : $AN=\frac{12\times 8}{16}$ و منه فإن : $AN=6\,cm$.

ب) -- لنحسب : NC .

لدينا من خلال الشكل : $NC = AC - AN$

أي : $NC = 8 - 6$ و منه فإن : $NC = 2\,cm$.

2) – لنثبت أن : $(BC) // (EF)$.

✠ لنبين أن : $\frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN}$.

لدينا : و $\left.\begin{array}{l} \frac{AE}{AM} = \frac{4}{16-4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \\ \frac{AF}{AN} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$

و منه فإن : $\frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN}$.

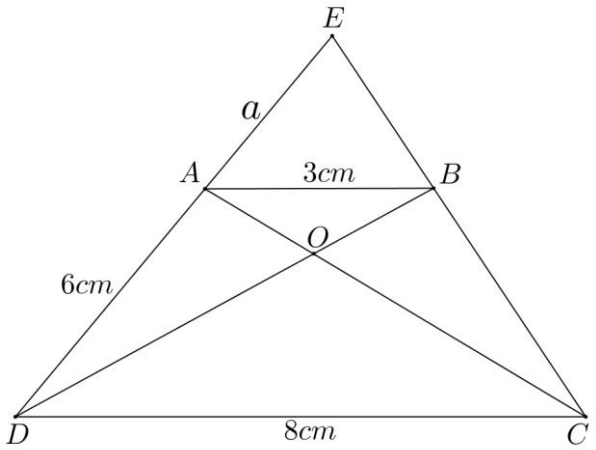
نعتبر المثلث AMN :

لدينا : و $\left.\begin{array}{l} E \in (AM) \\ F \in (AN) \end{array}\right\}$

و بما أن النقط M و A و E ثم النقط N و A و F لها نفس الترتيب بحيث : $\frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN}$

فإن حسب خاصية طاليس العكسية : $(BC) // (EF)$.

❀ تمرين ⑥ :



1) – أ) -- لنقارن النسبتين : $\frac{OB}{OD}$ و $\frac{AB}{DC}$.

✠ لنبين أن : $(DC) // (AB)$.

لدينا $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[DC]$

إذن : $(DC) // (AB)$.

نعتبر المثلث ODC :

لدينا : و $\left.\begin{array}{l} A \in (OC) \\ B \in (OD) \end{array}\right\}$ و بما أن : $(DC) // (AB)$

فإن حسب خاصية طاليس المباشرة : $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$

و منه فإن : $\frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD}$.

ب) -- لنستنتج حساب $\frac{OB}{OD}$:

نعلـم أن : $\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$

و بما أن : $\frac{AB}{DC}=\frac{3}{8}$ فإن : $\frac{OB}{OD}=\frac{3}{8}$.

2) – حساب قيمة a :

نعتبر المثلث EDC .

لدينا : و $\left.\begin{array}{l} A\in(ED) \\ B\in(EC) \end{array}\right\}$

و بما أن : $(DC)\ //\ (AB)$

فإن حسب خاصية طاليس المباشرة : $\frac{EA}{ED}=\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{DC}$

و منه فإن : $\frac{EA}{ED}=\frac{AB}{DC}$

أي $\frac{a}{a+6}=\frac{3}{8}$ يعني أن : $3(a+6)=8a$

و منه فإن : $3a+18=8a$

$$3a-8a=-18$$
$$-5a=-18$$
$$a=\frac{-18}{-5}$$

و بالتالي فإن : $\boxed{a=\frac{18}{5}}$.

3) – لنثبت أن : $OB\times EC=OD\times EB$:

نعلم أن : $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$ و $\frac{EA}{ED}=\frac{EB}{EC}=\frac{AB}{DC}$.

و منه فإن : $\frac{OB}{OD}=\frac{EB}{EC}$ يعني أن : $OB\times EC=OD\times EB$.

تمارين

الترتيب و العمليات

المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي

من إعداد الأستاذ : المهدي عنيس

تمرين ①:

1) – قارن ما يلي :

$\frac{-7}{18}$ و $\frac{-5}{9}$;; $-\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ و $-\sqrt{2}$;; $\frac{12}{5}+3^{2012}$ و $\frac{3}{7}+3^{2012}$

$2\sqrt{7}\times\frac{11}{25}$ و $2\sqrt{7}\times\frac{18}{5}$;; $-\sqrt{3}\times\frac{13}{7}$ و $-\sqrt{3}\times\frac{11}{2}$

2) – x و y عددان حقيقيان بحيث : $x>0$ و $y<0$.

قارن ما يلي :

$x+y$ و $y-x$;; $3y+x$ و $4y+x$

3) – قارن العددين الحقيقيين a و b بحيث :

$a=\sqrt{12}+\sqrt{27}$ و $b=\sqrt{48}$

تمرين ②:

1) – قارن ما يلي :

$3\sqrt{7}$ و $2\sqrt{17}$;; $-5\sqrt{4}$ و $-3\sqrt{11}$

$\sqrt{3}-\sqrt{17}$ و $3\sqrt{5}$;; $\sqrt{3}+2$ و $\sqrt{7+2\sqrt{11}}$

2) – a و b عددان حقيقيان موجبان بحيث : $a\leq b$.

أ) -- أثبت أن : $a+1\leq b+\frac{5}{4}$ و أن : $b+\sqrt{7}\geq a-3\sqrt{7}$.

ب) -- قارن العددين : b^2 و $\frac{a^2+3b^2}{4}$.

3) – a و b و c أعداد حقيقية موجبة.

أ) -- أثبت أن : $a^2+b^2\geq 2ab$.

ب) -- استنتج أن : $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

ج) -- إذا علمت أن : $a^2+b^2+c^2=1$ فبين أن : $(a+b+c)^2=1+2(ab+bc+ac)$.

د) -- استنتج من ما سبق أن : $a+b+c\leq\sqrt{3}$.

❀ تمرين ③ :

نضع : $x=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ و $y=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$.

1) – بين أن : $x-y=\frac{\sqrt{3}-7}{2}$.

2) – أ) -- قارن العددين : $\sqrt{3}$ و 7 .

ب) -- إستنتج مقارنة العددين x و y .

❀ تمرين ④ :

1) – أ) -- قارن العددين : $\sqrt{7}$ و 2 ثم $\sqrt{3}$ و 5 .

ب) -- إستنتج تبسيط العددين : $m=\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}$ و $n=\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}$.

2) – أ) -- أنشر و بسط العددين : $\left(\sqrt{5}-4\right)^2$ و $\left(6-\sqrt{2}\right)^2$.

ب) -- إستنتج تبسيطا للعددين : $v=\sqrt{21-8\sqrt{5}}$ ثم $w=\sqrt{38-12\sqrt{2}}$.

❀ تمرين ⑤ :

1) – أثبت أن : $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ ، ثم أن : $\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

2) – أ) -- قارن العددين : $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}+1$.

ب) -- إستنتج مقارنة العددين : $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

❀ تمرين ⑥ :

a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث :

$9\le a\le 16$ و $-7\le b\le -6$ و $\frac{1}{2}\le\frac{3c-1}{2}\le 1$ و $-2\le d\le -1$

1) – بين أن : $\frac{2}{3}\le c\le 1$.

2) – أطر ما يلي :

$a+b$ و ab و $\frac{a}{b}$ و $-3a+2b-15$ و $2\sqrt{a}+d$

a^2+bd-b^2 و $\frac{2b-d}{a+b}$ و $\sqrt{a^2-ab+b^2}$

تمرين ① :

1) – لنقارن ما يلي :

✠ $\frac{-7}{18}$ و $\frac{-5}{9}$:

لدينا : $\frac{-7}{18}-\frac{-5}{9}=\frac{-7}{18}-\frac{-10}{18}=\frac{-7+10}{18}=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$.

إذن : بما أن : $\frac{1}{6}\geq 0$ فإن : $\frac{-7}{18}-\frac{-5}{9}\geq 0$. و منه فإن : $\boxed{\frac{-7}{18}\geq\frac{-5}{9}}$.

✠ $-\sqrt{2}+\frac{1}{2}$ و $-\sqrt{2}$:

لدينا : $\frac{1}{2}\geq 0$ يعني أن : $-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\geq 0+\left(-\sqrt{2}\right)$ و منه فإن : $\boxed{-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\geq-\sqrt{2}}$.

✠ $\frac{12}{5}+3^{2012}$ و $\frac{3}{7}+3^{2012}$:

لدينا : $\frac{12}{5}-\frac{3}{7}=\frac{84}{35}-\frac{15}{35}=\frac{69}{35}$.

إذن : بما أن : $\frac{69}{35}\geq 0$ فإن : $\frac{12}{5}-\frac{3}{7}\geq 0$ و منه فإن : $\frac{12}{5}\geq\frac{3}{7}$ و بالتالي فإن : $\boxed{\frac{12}{5}+3^{2012}\geq\frac{3}{7}+3^{2012}}$.

✠ $2\sqrt{7}\times\frac{11}{25}$ و $2\sqrt{7}\times\frac{18}{5}$:

لدينا : $\frac{11}{25}-\frac{18}{5}=\frac{11}{25}-\frac{90}{25}=\frac{-79}{25}$.

إذن : بما أن : $\frac{-79}{25}\leq 0$ فإن : $\frac{11}{25}-\frac{18}{5}\leq 0$ و منه فإن : $\frac{11}{25}\leq\frac{18}{5}$.

و بما أن : $2\sqrt{7}>0$ فإن : $\boxed{\frac{11}{25}\times 2\sqrt{7}\leq\frac{18}{5}\times 2\sqrt{7}}$.

✠ $-\sqrt{3}\times\frac{13}{7}$ و $-\sqrt{3}\times\frac{11}{2}$:

لدينا : $\frac{13}{7}-\frac{11}{2}=\frac{26}{14}-\frac{77}{14}=\frac{-51}{14}$.

إذن : بما أن : $\frac{-51}{14}\leq 0$ فإن : $\frac{13}{7}-\frac{11}{2}\leq 0$ و منه فإن : $\frac{13}{7}\leq\frac{11}{2}$.

و بما أن : $-\sqrt{3}<0$ فإن : $\boxed{-\sqrt{3}\times\frac{13}{7}\geq-\sqrt{3}\times\frac{11}{2}}$.

2) – x و y عددان حقيقيان بحيث : $x>0$ و $y<0$.

✠ لنقارن : $x+y$ و $y-x$:

لدينا : $(x+y)-(y-x)=x+y-y+x=2x$.

و بما أن : $x>0$ فإن $2x>0$ و منه فإن : $(x+y)-(y-x)>0$ و بالتالي فإن : $\boxed{x+y>y-x}$.

✠ لنقارن : $3y+x$ و $4y+x$:

لدينا : $(3y+x)-(4y+x)=3y+x-4y-x=-y$.

و بما أن : $y<0$ فإن : $-y>0$ و منه فإن : $(3y+x)-(4y+x)>0$ و بالتالي فإن : $\boxed{3y+x>4y+x}$.

3) – قارن العددين الحقيقيين a و b بحيث : $a=\sqrt{12}+\sqrt{27}$ و $b=\sqrt{48}$:

لدينا : $\sqrt{12}+\sqrt{27}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$ و $\sqrt{48}=4\sqrt{3}$.

و بما أن : $5\sqrt{3}\geq 4\sqrt{3}$ فإن : $\sqrt{12}+\sqrt{27}\geq\sqrt{48}$ و بالتالي فإن : $\boxed{a\geq b}$.

❀ تمرين ② :

1) – لنقارن بين ما يلي :

✠ $3\sqrt{7}$ و $2\sqrt{17}$:

لدينا : $(3\sqrt{7})^2=63$ و $(2\sqrt{17})=68$.

إذن : $(3\sqrt{7})^2\leq(2\sqrt{17})^2$ و بما أن : و $\left.\begin{matrix}3\sqrt{7}>0\\2\sqrt{17}>0\end{matrix}\right\}$ فإن : $\boxed{3\sqrt{7}\leq 2\sqrt{17}}$.

✠ $-5\sqrt{5}$ و $-3\sqrt{11}$:

لدينا : $(-5\sqrt{5})^2=125$ و $(-3\sqrt{11})^2=99$.

إذن : $(-5\sqrt{5})^2\geq(-3\sqrt{11})^2$ و بما أن : و $\left.\begin{matrix}-5\sqrt{5}<0\\-3\sqrt{11}<0\end{matrix}\right\}$ فإن : $\boxed{-5\sqrt{5}\leq-3\sqrt{11}}$.

✠ $\sqrt{3}-\sqrt{17}$ و $3\sqrt{5}$:

لدينا : $3\sqrt{5}>0$.

*/ لنحدد إشارة $\sqrt{3}-\sqrt{17}$.

لدينا : و $\left.\begin{matrix}\sqrt{3}^2=3\\\sqrt{17}^2=17\end{matrix}\right\}$ إذن : $\sqrt{3}^2<\sqrt{17}^2$ و بما أن : و $\left.\begin{matrix}\sqrt{3}>0\\\sqrt{17}>0\end{matrix}\right\}$ فإن : $\sqrt{3}\leq\sqrt{17}$ و منه فإن : $\sqrt{3}-\sqrt{17}<0$

بما أن : و $\left.\begin{matrix}\sqrt{3}-\sqrt{17}<0\\3\sqrt{5}>0\end{matrix}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3}-\sqrt{17}<3\sqrt{5}}$.

✠ $\sqrt{3}+2$ و $\sqrt{7+2\sqrt{11}}$:

لدينا : $(\sqrt{3}+2)^2=\sqrt{3}^2+2\times\sqrt{3}\times2+2^2=3+4\sqrt{3}+4=7+4\sqrt{3}$ و $\left(\sqrt{7+2\sqrt{11}}\right)^2=7+2\sqrt{11}$.

*/ لنقارن : $4\sqrt{3}$ و $2\sqrt{11}$:

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}(4\sqrt{3})^2=48\\(2\sqrt{11})^2=44\end{array}\right\}$ إذن : $(4\sqrt{3})^2\geq(2\sqrt{11})^2$ و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}4\sqrt{3}>0\\2\sqrt{11}>0\end{array}\right\}$ فإن : $4\sqrt{3}\geq 2\sqrt{11}$.

و منه فإن : $7+4\sqrt{3}\geq 7+2\sqrt{11}$ أي $(\sqrt{3}+2)^2\geq\left(\sqrt{7+\sqrt{11}}\right)^2$

و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}+2>0\\\sqrt{7+\sqrt{11}}>0\end{array}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3}+2\geq\sqrt{7+\sqrt{11}}}$.

2) – a و b عددان حقيقيان موجبان بحيث : $a\leq b$.

أ) -- ✠ لنثبت أن : $a+1\leq b+\frac{5}{4}$.

لدينا : $5>4$ ، إذن : $1\leq\frac{5}{4}$ و بما أن : $a\leq b$ فإن : $\boxed{a+1\leq b+\frac{5}{4}}$.

✠ لنثبت أن : $b+\sqrt{7}\geq a-3\sqrt{7}$.

لدينا : $\sqrt{7}\geq-3\sqrt{7}$ و بما أن : $b\geq a$ فإن : $b+\sqrt{7}\geq a+(-3\sqrt{7})$ أي : $\boxed{b+\sqrt{7}\geq a-3\sqrt{7}}$.

ب) -- لنقارن العددين : $\frac{a^2+3b^2}{4}$ و b^2 .

لدينا : $\frac{a^2+3b^2}{4}-b^2=\frac{a^2+3b^2}{4}-\frac{4b^2}{4}=\frac{a^2+3b^2-4b^2}{4}=\frac{a^2-b^2}{4}$.

و بما أن : $a\leq b$ فإن : $a^2\leq b^2$ و منه فإن : $a^2-b^2\leq 0$ ، و بما أن $4\geq 0$ فإن : $\frac{a^2-b^2}{4}\leq 0$

و منه فإن : $\frac{a^2+3b^2}{4}-b^2\leq 0$ و بالتالي فإن : $\boxed{\frac{a^2+3b^2}{4}\leq b^2}$.

3) – a و b و c أعداد حقيقية موجبة .

أ) -- لنثبت أن : $a^2+b^2\geq 2ab$.

لدينا : $(a^2+b^2)-2ab=a^2+b^2-2ab=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

و بما أن : $(a-b)^2\geq 0$ فإن : $(a^2+b^2)-2ab\geq 0$ و بالتالي فإن : $a^2+b^2\geq 2ab$.

ب) -- لنستنتج أن : $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

لدين من خلال ما سبق أن : $\left.\begin{array}{l}a^2+b^2\geq 2ab\\b^2+c^2\geq 2bc\\a^2+c^2\geq 2ac\end{array}\right\}$ و منه فإن : $(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(a^2+c^2)\geq 2ab+2bc+2ac$

أي : $a^2+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2\geq 2(ab+bc+ac)$ و منه فإن : $2a^2+2b^2+2c^2\geq 2(ab+bc+ac)$

إذن : $2(a^2+b^2+c^2)\geq 2(ab+bc+ac)$ و منه فإن : $a^2+b^2+c^2=\frac{2(ab+bc+ac)}{2}$

و بالتالي فإن : $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$.

ج) -- علما أن : $a^2+b^2+c^2=1$ لنبين أن : $(a+b+c)^2=1+2(ab+bc+ac)$.

لدينا :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2=\left[(a+b)+c\right]^2&=(a+b)^2+2\times(a+b)\times c+c^2\\&=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2\\&=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\\&=\left(a^2+b^2+c^2\right)+2(ab+bc+ac)\\&=1+2(ab+bc+ac)\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{(a+b+c)^2=1+2(ab+bc+ac)}$.

د) -- لنستنتج من ما سبق أن : $a+b+c\le\sqrt{3}$.

نعلم أن : و $\left.\begin{array}{r}a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac\\a^2+b^2+c^2=1\end{array}\right\}$ ، إذن : $1\ge ab+bc+ac$. (1)

و بما أن : $(a+b+c)^2=1+2(ab+bc+ac)$ فإن : $ab+bc+ac=\dfrac{(a+b+c)^2-1}{2}$. (2)

و من (1) و (2) نستنتج أن : $1\ge\dfrac{(a+b+c)^2-1}{2}$ أي : $\dfrac{(a+b+c)^2-1}{2}\le 1$ ،

و منه فإن : $(a+b+c)^2-1\le 2$ يعني أن : $(a+b+c)^2\le 2+1$ أي : $(a+b+c)^2\le 3$

و بالتالي فإن : $\sqrt{(a+b+c)^2}\le\sqrt{3}$ أي : $\boxed{a+b+c\le\sqrt{3}}$.

تمرين ③ :

1) – لنبين أن : $x-y=\dfrac{\sqrt{3}-7}{2}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}x-y&=\frac{2}{\sqrt{3}+1}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}^2-1^2}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{3-1}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{2\sqrt{3}-2}{2}-\frac{5+\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{2\sqrt{3}-2-5-\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}-7}{2}\end{aligned}$$

2) –أ) -- لنقارن العددين : $\sqrt{3}$ و 7 .

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}^2=3\\7^2=49\end{array}\right\}$ ، إذن : $\sqrt{3}^2\le 7^2$ و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}>0\\7>0\end{array}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3}\le 7}$.

ب) -- لنستنتج مقارنة x و y :

لدينا : $\sqrt{3}\le 7$ يعني أن : $\sqrt{3}-7\le 0$ و منه فإن : $\frac{\sqrt{3}-7}{2}\le 0$ أي : $x-y\le 0$

و بالتالي فإن : $\boxed{x\le y}$.

تمرين ④ :

1)–أ) -- ✠ لنقارن العددين : $\sqrt{7}$ و 2 .

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{7}^2=7\\2^2=4\end{array}\right\}$ إذن : $\sqrt{7}^2\ge 2^2$ ، و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{7}>0\\2>0\end{array}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{7}\ge 2}$.

✠ لنقارن العددين : $\sqrt{3}$ و 5 .

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}^2=3\\5^2=25\end{array}\right\}$ إذن : $\sqrt{3}^2\le 5^2$ ، و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{3}>0\\5>0\end{array}\right\}$ فإن : $\boxed{\sqrt{3}\le 5}$.

ب) -- لنستنتج تبسيط العددين : $m=\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}$ و $n=\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}$.

نعلم أن : $\sqrt{7}\ge 2$ يعني : $\sqrt{7}-2\ge 0$ و منه فإن : $\boxed{m=\sqrt{\left(\sqrt{7}-2\right)^2}=\sqrt{7}-2}$.

و نعلم أن : $\sqrt{3}\le 5$ يعني أن : $\sqrt{3}-1\le 0$ و منه فإن : $\boxed{n=\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2}=5-\sqrt{3}}$.

2) –أ) -- أنشر و بسط العددين : $\left(\sqrt{5}-4\right)^2$ و $\left(6-\sqrt{2}\right)^2$.

لدينا : و $\left.\begin{array}{l}\left(\sqrt{5}-4\right)^2=\sqrt{5}^2-2\times 4\times\sqrt{5}+4^2=5-8\sqrt{5}+16=21-8\sqrt{5}\\\left(6-\sqrt{2}\right)^2=6^2-2\times 6\times\sqrt{2}+\sqrt{2}^2=36-12\sqrt{2}+2=38-12\sqrt{2}\end{array}\right\}$.

ب) -- ✠ لنستنتج تبسيطا للعدد : $v=\sqrt{21-8\sqrt{5}}$.

لدينا : $\left(\sqrt{5}-4\right)^2=21-8\sqrt{5}$ يعني أن : $v=\sqrt{21-8\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-4\right)^2}$.

*/ لنحدد إشارة : $\sqrt{5}-4$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l}\sqrt{5}^2=5\\4^2=16\end{array}\right\}$ ، إذن : $\sqrt{5}^2\le 4^2$ و بما أن : و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{5}>0\\4>0\end{array}\right\}$ فإن : $\sqrt{5}\le 4$ و منه : $\boxed{\sqrt{5}-4\le 0}$.

و بالتالي فإن : $\boxed{v=\sqrt{21-8\sqrt{5}}=\sqrt{\left(\sqrt{5}-4\right)^2}=4-\sqrt{5}}$.

✠ لنستنتج تبسيطا للعدد : $w=\sqrt{38-12\sqrt{2}}$.

لدينا : $\left(6-\sqrt{2}\right)^2=38-12\sqrt{2}$ يعني أن : $w=\sqrt{38-12\sqrt{2}}=\sqrt{\left(6-\sqrt{2}\right)^2}$.

*/ لنحدد إشارة : $6-\sqrt{2}$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l}6^2=36\\ \sqrt{2}^2=2\end{array}\right\}$ ، إذن : $6^2\geq\sqrt{2}^2$ و بما أن : $\left.\begin{array}{l}6>0\\ \sqrt{2}>0\end{array}\right\}$ فإن : $6\geq\sqrt{2}$ و منه فإن : $\boxed{6-\sqrt{2}\geq 0}$.

و بالتالي فإن : $\boxed{w=\sqrt{38-12\sqrt{2}}=\sqrt{\left(6-\sqrt{2}\right)^2}=6-\sqrt{2}}$.

❀ تمرين ⑤ :

1) – ✠ لنثبت أن : $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$.

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{1\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$.

✠ لنثبت أن : $\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

لدينا : $\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{1\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}^2-1^2}=\frac{\sqrt{3}-1}{3-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

2) –أ) -- لنقارن العددين : $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}+1$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l}\sqrt{5}^2=5\\ 1^2=1\end{array}\right\}$ ، إذن : $\sqrt{5}^2\geq 1^2$ و بما أن : $\left.\begin{array}{l}\sqrt{5}>0\\ 1>0\end{array}\right\}$ فإن : $\sqrt{5}\geq 1$ و منه فإن : $\boxed{\sqrt{5}+\sqrt{3}\geq\sqrt{3}+1}$.

ب) -- لنستنتج مقارنة العددين : $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

نعلم أن : $\sqrt{5}+\sqrt{3}\geq\sqrt{3}+1$ يعني أن : $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\leq\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ و بما أن : $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{array}\right\}$ فإن :

$$\boxed{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}\leq\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

❀ تمرين ⑥ :

1) –لنبين أن : $\frac{2}{3}\leq c\leq 1$.

لدينا : $\frac{1}{2}\leq\frac{3c-1}{2}\leq 1$ يعني أن : $\frac{1}{2}\times 2\leq\frac{3c-1}{2}\times 2\leq 1\times 2$ و منه فإن : $1\leq 3c-1\leq 2$

إذن : $1+1\leq 3c-1+1\leq 2+1$ أي : $2\leq 3c\leq 3$ و منه فإن : $2\times\frac{1}{3}\leq 3c\times\frac{1}{3}\leq 3\times\frac{1}{3}$ و بالتالي فإن : $\boxed{\frac{2}{3}\leq c\leq 1}$.

2) – ✠ لنؤطر $a+b$:

لدينا : و $\begin{cases} 9 \le a \le 16 \\ -7 \le b \le -6 \end{cases}$ ، إذن : $9-7 \le a+b \le 16-6$ و منه فإن : $\boxed{2 \le a+b \le 10}$.

✠ لنؤطر ab :

لدينا : و $\begin{cases} 9 \le a \le 16 \\ 6 \le -b \le 7 \end{cases}$ ، إذن : $9\times 6 \le a\times(-b) \le 16\times 7$ أي : $54 \le -ab \le 112$ و منه فإن :

$\boxed{-112 \le ab \le -54}$.

✠ لنؤطر $\frac{a}{b}$:

لدينا : و $\begin{cases} 9 \le a \le 16 \\ \frac{1}{7} \le \frac{1}{-b} \le \frac{1}{6} \end{cases}$ ، إذن : $9\times\frac{1}{7} \le a\times\frac{1}{-b} \le 16\times\frac{1}{6}$ أي : $\frac{9}{7} \le \frac{a}{-b} \le \frac{16}{6}$

و منه فإن : $\frac{9}{7} \le \frac{a}{-b} \le \frac{8}{3}$ و بالتالي فإن : $\boxed{-\frac{8}{3} \le \frac{a}{b} \le -\frac{9}{7}}$.

✠ لنؤطر $-3a+2b-15$:

لدينا : و $\begin{cases} 9 \le a \le 16 \\ -7 \le b \le -6 \end{cases}$ ، إذن : $\begin{cases} -3\times 16 \le -3a \le -3\times 9 \\ 2\times(-7) \le 2b \le 2\times(-6) \end{cases}$ أي : $\begin{cases} -48 \le -3a \le -27 \\ -14 \le 2b \le -12 \end{cases}$

و منه فإن : $-48-14-15 \le -3a+2b-15 \le -27-12-15$ و بالتالي فإن : $\boxed{-77 \le -3a+2b-15 \le -54}$.

✠ لنؤطر $2\sqrt{a}+d$:

لدينا : و $\begin{cases} 9 \le a \le 16 \\ -2 \le d \le -1 \end{cases}$ ، إذن : و $\begin{cases} \sqrt{9} \le \sqrt{a} \le \sqrt{16} \\ -2 \le d \le -1 \end{cases}$ أي : و $\begin{cases} 3 \le \sqrt{a} \le 4 \\ -2 \le d \le -1 \end{cases}$ و منه فإن : $3-2 \le \sqrt{a}+d \le 4-1$

و بالتالي فإن : $\boxed{1 \le \sqrt{a}+d \le 3}$.

✠ لنؤطر a^2+bd-b^2 :

لدينا : و $\begin{cases} 9 \le a \le 16 \\ 6 \le -b \le 7 \\ 1 \le -d \le 2 \end{cases}$ ، إذن : و $\begin{cases} 81 \le a^2 \le 256 \\ -49 \le -b^2 \le -36 \\ 6 \le bd \le 14 \end{cases}$ و منه فإن : $81+6-49 \le a^2+bd-b^2 \le 256+14-36$

و بالتالي فإن : $\boxed{38 \le a^2+bd-b^2 \le 234}$.

✠ لنؤطر $\frac{2b-d}{a+b}$: نضع : $\frac{2b-d}{a+b} = (2b-d)\times\frac{1}{a+b}$.

لدينا : و $\begin{cases} -7 \le b \le -6 \\ -2 \le d \le -1 \end{cases}$ ، إذن : و $\begin{cases} -14 \le 2b \le -12 \\ 1 \le -d \le 2 \end{cases}$ و منه فإن : $-14+1 \le 2b-d \le -12+2$ أي : $\boxed{-13 \le 2b-d \le -10}$

نعلم أن : $2 \le a+b \le 10$ ، إذن : $\boxed{\frac{1}{10} \le \frac{1}{a+b} \le \frac{1}{2}}$.

لدينا : و $\left.\begin{array}{l} -13 \le 2b-d \le -10 \\ \frac{1}{10} \le \frac{1}{a+b} \le \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ ، إذن : $\left.\begin{array}{l} 10 \le -(2b-d) \le 13 \\ \frac{1}{10} \le \frac{1}{a+b} \le \frac{1}{2} \end{array}\right\}$ ومنه فإن : $10 \times \frac{1}{10} \le -(2b-d) \times \frac{1}{a+b} \le 13 \times \frac{1}{2}$

أي : $1 \le -\frac{2b-d}{a+b} \le \frac{13}{2}$ و بالتالي فإن : $\boxed{-\frac{13}{2} \le \frac{2b-d}{a+b} \le -1}$.

✠ لنؤطر $\sqrt{a^2-ab+b^2}$:

لدينا : و $\left.\begin{array}{l} 9 \le a \le 16 \\ -7 \le b \le -6 \end{array}\right\}$ ، إذن : و $\left.\begin{array}{l} 81 \le a^2 \le 256 \\ -112 \le ab \le -54 \\ (-6)^2 \le b^2 \le (-7)^2 \end{array}\right\}$ و منه فإن : $\left.\begin{array}{l} 81 \le a^2 \le 256 \\ 54 \le -ab \le 112 \\ 36 \le b^2 \le 49 \end{array}\right\}$

إذن : $81+54+36 \le a^2-ab+b^2 \le 256+112+49$ و منه فإن : $171 \le a^2-ab+b^2 \le 417$.

و بالتالي فإن : $\sqrt{171} \le \sqrt{a^2-ab+b^2} \le \sqrt{417}$ أي : $\boxed{3\sqrt{19} \le \sqrt{a^2-ab+b^2} \le \sqrt{417}}$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة الدار البيضاء الكبرى
نيابة المحمدية

تمارين

مبرهنة فيتاغورس + الحساب المثلثي

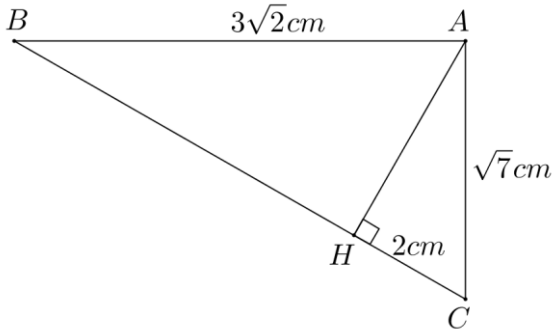
المستـــــوى : الثالثة ثانوي إعـــدادي

من إعداد الأستاذ : المهـــــدي عنيـــس

موقع الرياضيات بالثانوي الإعدادي
www.anissmaths.net

تمرين ①:

نعتبر الشكل جانبه :

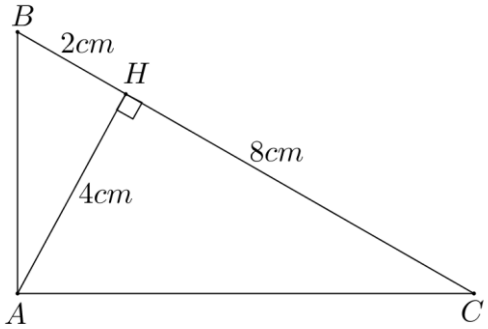


بحيث : H المسقط العمودي للنقطة A على (BC).

أحسب : AH ثم BH.

تمرين ②:

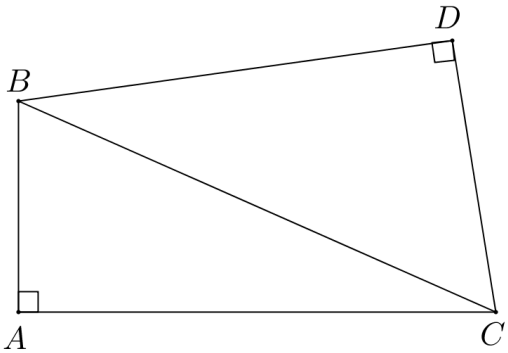
نعتبر الشكل جانبه :



أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية.

تمرين ③:

نعتبر الشكل جانبه :



أثبت أن : $AB^2 + AC^2 = DB^2 + DC^2$

تمرين ④:

ABC مثلث بحيث : $AB = 6\,cm$ و $AC = 8\,cm$ و $BC = 10\,cm$.

1) – أثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية.

2) – أحسب النسب المثلثية للزاوية $A\hat{B}C$.

3) – أرسم الشكل ثم أنشئ H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC).

4) – أحسب : AH ثم CH.

❀ تمرين ⑤ :

α قياس زاوية حادة بحيث : $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

1) – بسط ما يلي :

$$A = \cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) - \sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha) \quad \text{و} \quad B = \frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha} - \frac{2}{\cos^2\alpha}$$

$$C = (\cos\alpha + \sin\alpha)^2 + (\cos\alpha - \sin\alpha)^2 \quad \text{و} \quad D = \cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha$$

$$E = \sin\alpha \times \sqrt{1-\cos\alpha} \times \sqrt{1+co\alpha} + \cos^2\alpha \quad \text{و} \quad F = \sqrt{2}\sin^2\alpha + 2\sin 45^\circ \cos^2\alpha$$

2) – بين أن :

$$\frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \quad \text{و} \quad \sqrt{1-\sin\alpha} \times \sqrt{1+\sin\alpha} = \cos\alpha$$

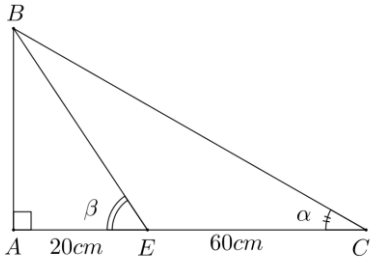
$$\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \quad \text{و} \quad 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

3) – نفترض أن : $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

أ) -- أحسب : $\cos\alpha$ ثم $\tan\alpha$.

ب) -- إستنتج حساب : $\sin(90^\circ - \alpha)$ و $\cos(90^\circ - \alpha)$ و $\tan(90^\circ - \alpha)$.

❀ تمرين ⑥ :



نعتبر الشكل جانبه بحيث : $\alpha + \beta = 90^\circ$.

$AE = 20\,cm$ و $EC = 60$. أحسب : AB.

❀ تمرين ⑦ :

ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث : $BC = 15\,cm$ و $\sin A\hat{B}C = \frac{3}{5}$.

1) – أحسب : $\cos A\hat{B}C$ و $\tan A\hat{B}C$.

2) – أحسب : AB ثم AC.

❀ تمرين ⑧ :

أحسب ما يلي :

$$A = 2\cos 15^\circ + \cos^2 36^\circ - 2\sin 75^\circ + \cos^2 54^\circ$$

$$B = \cos^2 28^\circ - \sin^2 51^\circ + \cos^2 62^\circ + \cos^2 39^\circ$$

$$C = \tan 73^\circ \times \tan 17^\circ - \sin^2 40^\circ - \sin^2 50^\circ$$

حلول التمارين

مبرهنة فيتاغورس + الحساب المثلثي

المستـــــوى : الثالثـة ثانـوي إعـــدادي

من إعداد الأستاذ : المهـــــدي عنيـــس

تمرين ①:

1) – حساب : AH .

لدينا : H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

إذن : AHC مثلث قائم الزاوية في H .

و حسب مبرهن فيتاغورس المباشرة فإن :

$$AC^2 = AH^2 + HC^2$$

أي : $\sqrt{7}^2 = AH^2 + 2^2$

و منه فإن :

$$AH^2 = \sqrt{7}^2 - 2^2$$
$$= 7 - 4$$
$$= 3$$

و بما أن : $AH > 0$ فإن : $\boxed{AH = \sqrt{3}\ cm}$.

2) – حساب : BH .

لدينا : H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

إذن المثلث AHB قائم الزاوية في H .

و حسب مبرهن فيتاغورس المباشرة فإن :

$$AB^2 = HA^2 + BH^2$$

أي : $\left(3\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{3}^2 + BH^2$

و منه فإن :

$$BH^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{3}^2$$
$$= 18 - 3$$
$$= 15$$

و بما أن : $BH > 0$ فإن : $\boxed{BH = \sqrt{15}}$.

تمرين ②:

لنثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية .

أ) -- لنحسب : AB .

لدينا من خلال الشكل : ABH مثلث قائم الزاوية في H .

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن : $AB^2 = HA^2 + HB^2$. أي :

$$AB^2 = 4^2 + 2^2$$
$$= 16 + 4$$
$$= 20$$

و بما أن : $AB > 0$ فإن : $AB = \sqrt{20}$ ، أي : $\boxed{AB = 2\sqrt{5}\ cm}$.

ب) -- لنحسب : AC .

لدينا من خلال الشكل : ACH مثلث قائم الزاوية في H .

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن : $AC^2 = HA^2 + HC^2$. أي :

$$AC^2 = 4^2 + 8^2$$
$$= 16 + 64$$
$$= 80$$

و بما أن : $AC > 0$ فإن : $AC = \sqrt{80}$ ، أي : $\boxed{AC = 4\sqrt{5}\ cm}$.

ج) -- لنثبت أن : ABC مثلث قائم الزاوية .

لدينا : و $\left\{\begin{array}{l} AB^2 = 20 \\ AC^2 = 80 \\ BC^2 = 100 \end{array}\right.$ ، إذن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

وحسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن ABC مثلث قائم الزاوية في A .

❀ تمرين ③ :

لنثبت أن : $AB^2 + AC^2 = DB^2 + DC^2$.

*/ لدينا من خلال الشكل ABC مثلث قائم الزاوية في A .

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$. ①

*/ و لدينا من خلال الشكل DBC مثلث قائم الزاوية في D .

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن : $BC^2 = DB^2 + DC^2$. ②

و من ① و ② نستنتج أن : $\boxed{AB^2 + AC^2 = DB^2 + DC^2}$.

❀ تمرين ④ :

1) – لنثبت أن ABC مثلث قائم الزاوية.

لدينا : و $\left\{\begin{array}{l} AB^2 = 6^2 = 36 \\ AC^2 = 8^2 = 64 \\ BC^2 = 10^2 = 100 \end{array}\right.$ ، إذن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

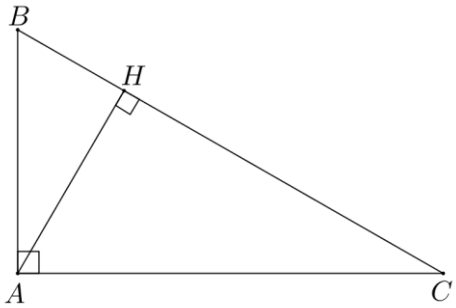
وحسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن ABC مثلث قائم الزاوية في A .

2) – لنحسب النسب المثلثية للزاوية $A\hat{B}C$:

*/ لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في A .

إذن : و $\left\{\begin{array}{l} \cos A\hat{B}C = \dfrac{AB}{BC} \\ \sin A\hat{B}C = \dfrac{AC}{BC} \\ \tan A\hat{B}C = \dfrac{AC}{AB} \end{array}\right.$ ، أي : و $\left\{\begin{array}{l} \cos A\hat{B}C = \dfrac{6}{10} \\ \sin A\hat{B}C = \dfrac{8}{10} \\ \tan A\hat{B}C = \dfrac{8}{6} \end{array}\right.$ ، إذن : و $\left\{\begin{array}{l} \boxed{\cos A\hat{B}C = \dfrac{3}{5}} \\ \boxed{\sin A\hat{B}C = \dfrac{4}{5}} \\ \boxed{\tan A\hat{B}C = \dfrac{4}{3}} \end{array}\right.$.

3) – الشكل :



4) – */ لنحسب : AH .

بما أن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) ، فإن : ABH مثلث قائم الزاوية في H .

و منه فإن : $\sin A\hat{B}H = \frac{AH}{AB}$ ، أي : $\sin A\hat{B}H = \frac{AH}{6}$

و بما أن : $A\hat{B}H = A\hat{B}C$ (نفس الزاوية) ، فإن : $\sin A\hat{B}H = \sin A\hat{B}C$

أي : $\frac{AH}{6} = \frac{4}{5}$ يعني أن : $AH = \frac{6\times 4}{5}$

و بالتالي فإن : $\boxed{AH = \frac{24}{5}\,cm}$.

*/ لنحسب : CH .

بما أن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) ، فإن : ACH مثلث قائم الزاوية في H .

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن : $AC^2 = AH^2 + CH^2$ ، أي : $8^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + CH^2$.

و منه فإن :

$$CH^2 = 8^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2 = 64 - \frac{576}{25} = \frac{1600-576}{25} = \frac{1024}{25} .$$

و بما أن : $CH > 0$ فإن : $CH = \sqrt{\frac{1024}{25}}$ ، و بالتالي فإن : $\boxed{CH = \frac{32}{5}\,cm}$.

تمرين ⑤ :

1) – لنبسط ما يلي :

$$\begin{aligned}
A &= \cos\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha) - \sin\alpha(\cos\alpha - \sin\alpha)\\
&= \cos\alpha\times\sin\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha\times\cos\alpha + \sin^2\alpha\\
&= \cos\alpha\times\sin\alpha - \cos\alpha\times\sin\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\\
&= 0 + 1\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{1+\sin\alpha} + \frac{1}{1-\sin\alpha} - \frac{2}{\cos^2\alpha}\\
&= \frac{(1-\sin\alpha)+(1+\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)} - \frac{2}{\cos^2\alpha}\\
&= \frac{1-\sin\alpha+1+\sin\alpha}{1^2-\sin^2\alpha} - \frac{2}{\cos^2\alpha}\\
&= \frac{2}{1-\sin^2\alpha} - \frac{2}{\cos^2\alpha}\\
&= \frac{2}{\cos^2\alpha} - \frac{2}{\cos^2\alpha}\\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos^2\alpha + 3\sin^2\\
&= \left(\cos^2\alpha\right)^2 - \left(\sin^2\alpha\right)^2 - \cos^2\alpha + 3\sin^2\\
&= \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha - \sin^2\right) - \cos^2\alpha + 3\sin^2\\
&= 1\times\left(\cos^2\alpha - \sin^2\right) - \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha\\
&= \cos^2\alpha - \sin^2 - \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha\\
&= 2\sin^2\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= \sin\alpha\times\sqrt{1-\cos\alpha}\times\sqrt{1+\cos\alpha} + \cos^2\alpha\\
&= \sin\alpha\times\sqrt{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)} + \cos^2\alpha\\
&= \sin\alpha\times\sqrt{1^2-\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha\\
&= \sin\alpha\times\sqrt{1-\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha\\
&= \sin\alpha\times\sqrt{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha\\
&= \sin\alpha\times\sin\alpha + \cos^2\alpha\\
&= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\\
&= 1
\end{aligned}$$

$$E=(\cos\alpha+\sin\alpha)^2+(\cos\alpha-\sin\alpha)^2$$
$$=\cos^2\alpha+2\cos\alpha\times\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos\alpha\times\sin\alpha+\sin^2\alpha$$
$$=2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha$$
$$=2\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)$$
$$=2\times1$$
$$=2$$

$$F=\sqrt{2}\times\sin^2\alpha+2\sin45^\circ\times\cos^2\alpha$$
$$=\sqrt{2}\times\sin^2\alpha+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos^2\alpha$$
$$=\sqrt{2}\times\sin^2\alpha+\sqrt{2}\times\cos^2\alpha$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$$
$$=\sqrt{2}\times1$$
$$=\sqrt{2}$$

2) – */ لنبين أن : $\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=1$.

لدينا :

$$\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\left(\cos^2\alpha\right)^2-\left(\sin^2\alpha\right)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$
$$=\frac{\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$
$$=\frac{1\times\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$
$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$
$$=1$$

*/ لنبين أن : $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l}(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\\ \sin\alpha\times\sin\alpha=\sin^2\alpha\end{array}\right\}$ و

إذن : $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin\alpha\times\sin\alpha$

و بالتالي فإن : $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

*/ لنبين أن : $\sqrt{1-\sin\alpha}\times\sqrt{1+\cos\alpha}=\cos\alpha$.

لدينا :

$$\sqrt{1-\sin\alpha}\times\sqrt{1+\sin\alpha}=\sqrt{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}$$
$$=\sqrt{1^2-\sin^2\alpha}$$
$$=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$
$$=\sqrt{\cos^2\alpha}$$
$$=\cos\alpha$$

إذن : $\boxed{\sqrt{1-\sin\alpha}\times\sqrt{1+\cos\alpha}=\cos\alpha}$

*/ لنبين أن : $\sin^2\alpha=\frac{\tan^2}{1+\tan^2}$

لدينا :

$$\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}$$
$$=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\times\frac{\cos^2\alpha}{1}$$
$$=\sin^2\alpha$$

إذن : $\boxed{\sin^2\alpha=\frac{\tan^2}{1+\tan^2}}$.

*/ لنبين أن : $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$.

لدينا :

$$1+\tan^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

إذن : $\boxed{1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}}$.

3) –أ) -- */ حساب $\cos\alpha$:

لدينا : $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ يعني أن :

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha=1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\cos^2\alpha=1-\frac{3}{4}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{4-3}{4}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$$

و بما أن : $0<\cos\alpha<1$ فإن : $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{4}}$

أي : $\boxed{\cos\alpha=\frac{1}{2}}$

*/ حساب $\tan\alpha$:

نعلم أن : $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

و منه فإن : $\tan\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$ و بالتالي : $\boxed{\tan\alpha=\sqrt{3}}$

ب) -- */ حساب :

$\sin\left(90^\circ-\alpha\right)$ و $\cos\left(90^\circ-\alpha\right)$ و $\tan\left(90^\circ-\alpha\right)$

لدينا : $\left(90^\circ-\alpha\right)+\alpha=90^\circ+\alpha-\alpha=90^\circ$

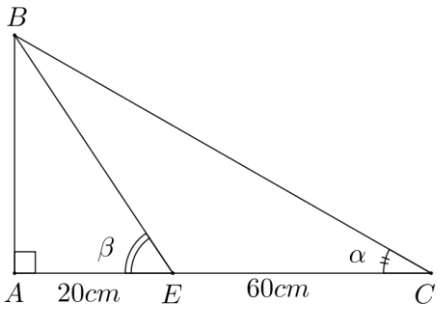
إذن :

$$\sin\left(90^\circ-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(90^\circ-\alpha\right)=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

❀ تمرين ⑥ :



لنحسب : AB .

*/ لدينا من خلال الشكل :

ABC مثلث قائم الزاوية في A و ABE مثلث قائم الزاوية في A .

إذن : و $\left\{\begin{array}{l}\tan A\hat{C}B=\frac{AB}{AC}\\ \tan A\hat{E}B=\frac{AB}{AE}\end{array}\right.$

أي : و $\left\{\begin{array}{l}\tan\alpha=\frac{AB}{80}\\ \tan\beta=\frac{AB}{20}\end{array}\right.$.

و بما أن : $\alpha+\beta=90^\circ$ فإن : $\tan\alpha=\frac{1}{\tan\beta}$

أي : $\frac{AB}{80}=\frac{1}{\frac{AB}{20}}$

و منه فإن : $\frac{AB}{80}=\frac{20}{AB}$ ، يعني أن : $AB^2=1600$

و بما أن : $AB>0$ فإن : $AB=\sqrt{1600}$ ، و بالتالي فإن : $\boxed{AB=40\ cm}$.

❀ تمرين ⑦ :

1) – */ حساب : $\cos A\hat{B}C$.

لدينا : $\cos^2 A\hat{B}C + \sin^2 A\hat{B}C = 1$ ، يعني أن $\cos^2 A\hat{B}C = 1 - \sin^2 A\hat{B}C$

أي : $\cos^2 A\hat{B}C = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

و بما أن : $0 < \cos A\hat{B}C < 1$ فإن : $\cos A\hat{B}C = \sqrt{\frac{16}{25}}$ ، و بالتالي فإن : $\boxed{\cos A\hat{B}C = \frac{4}{5}}$.

*/ حساب : $\tan A\hat{B}C$.

لدينا : $\tan A\hat{B}C = \frac{\sin A\hat{B}C}{\cos A\hat{B}C}$ ، أي : $\tan A\hat{B}C = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$ ، إذن : $\boxed{\tan A\hat{B}C = \frac{3}{4}}$.

2) – حساب : AB و AC .

لدينا ABC مثلث قائم الزاوية في A .

إذن : $\left.\begin{array}{l}\cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC} \\ \sin A\hat{B}C = \frac{AC}{BC}\end{array}\right\}$ و ، أي : $\left.\begin{array}{l}\frac{4}{5} = \frac{AB}{15} \\ \frac{3}{5} = \frac{AC}{BC}\end{array}\right\}$ و

يعني أن : $\left.\begin{array}{l}AB = \frac{60}{5} \\ AC = \frac{45}{5}\end{array}\right\}$ و ، و بالتالي فإن : $\left.\begin{array}{l}\boxed{AB = 12\ cm} \\ \boxed{AC = 9\ cm}\end{array}\right\}$ و .

❀ تمرين ⑧ :

1) – لنحسب : $A = 2\cos 15^\circ + \cos^2 36^\circ - 2\sin 75^\circ + \cos^2 54^\circ$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l}15^\circ + 75^\circ = 90^\circ \\ 36^\circ + 54^\circ = 90^\circ\end{array}\right\}$ و ، إذن : $\left.\begin{array}{l}\cos 15^\circ = \sin 75^\circ \\ \cos 36^\circ = \cos 54^\circ\end{array}\right\}$ و

و منه فإن :

$$\begin{aligned}A &= 2\cos 15^\circ + \cos^2 36^\circ - 2\sin 75^\circ + \cos^2 54^\circ \\ &= 2\sin 75^\circ + \sin^2 54^\circ - 2\sin 75^\circ + \cos^2 54^\circ \\ &= 2\sin 75^\circ - 2\sin 75^\circ + \sin^2 54^\circ + \cos^2 54^\circ \\ &= 0 + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

2) – لنحسب : $B=\cos^2 28^\circ-\sin^2 51^\circ+\cos^2 62^\circ+\cos^2 39^\circ$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l}28^\circ+62^\circ=90^\circ\\51^\circ+39^\circ=90^\circ\end{array}\right\}$ و ، إذن : $\left.\begin{array}{l}\cos 28^\circ=\sin 62^\circ\\\sin 51^\circ=\cos 39^\circ\end{array}\right\}$

و منه فإن :

$$\begin{aligned}B&=\cos^2 28^\circ-\sin^2 51^\circ+\cos^2 62^\circ+\cos^2 39^\circ\\&=\sin^2 62^\circ-\cos^2 39^\circ+\cos^2 62^\circ+\cos^2 39^\circ\\&=\sin 62^\circ+\cos^2 62^\circ-\cos^2 39^\circ+\cos^2 39^\circ\\&=1+0\\&=1\end{aligned}$$

3) – لنحسب : $C=\tan 73^\circ\times\tan 17^\circ-\sin^2 40^\circ-\sin^2 50^\circ$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l}73^\circ+17^\circ=90^\circ\\40^\circ+50^\circ=90^\circ\end{array}\right\}$ و ، إذن : $\left.\begin{array}{l}\tan 73^\circ=\dfrac{1}{\tan 17^\circ}\\\sin 40^\circ=\cos 50^\circ\end{array}\right\}$ و

و منه فإن :

$$\begin{aligned}C&=\tan 73^\circ\times\tan 17^\circ-\sin^2 40^\circ-\sin^2 50^\circ\\&=\frac{1}{\tan 17^\circ}\times\tan 17^\circ-\cos^2 50^\circ-\sin^2 50^\circ\\&=\frac{\tan 17^\circ}{\tan 17^\circ}-\left(\cos^2 50^\circ+\sin^2 50^\circ\right)\\&=1-1\\&=0\end{aligned}$$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵉⵍⵖ ⴰⵣⵣⵓⵍⴰⵏ
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة الدار البيضاء الكبرى
نيابة المحمدية

تمارين

الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية

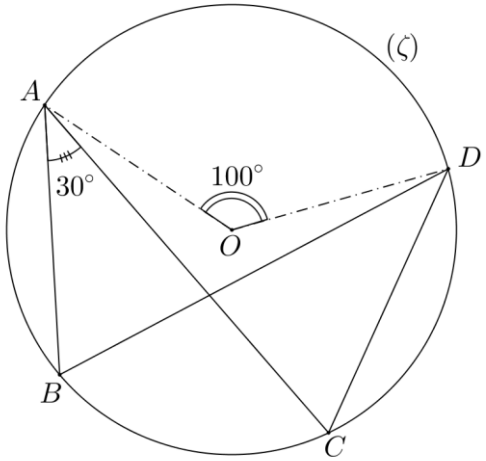
المستـــوى : الثالثـة ثانـوي إعـدادي

من إعداد الأستاذ : المهـــدي عنيـــس

موقع الرياضيات بالثانوي الإعدادي
ⴰⵙⵎⵍ ⵜⵓⵙⵏⴰⴽⵜ ⵙ ⴰⵙⵉⵏⴰⵏ ⵓⵙⵎⴷⵉ
www.anissmaths.net

تمرين ①:

نعتبر الشكـل جانبه :



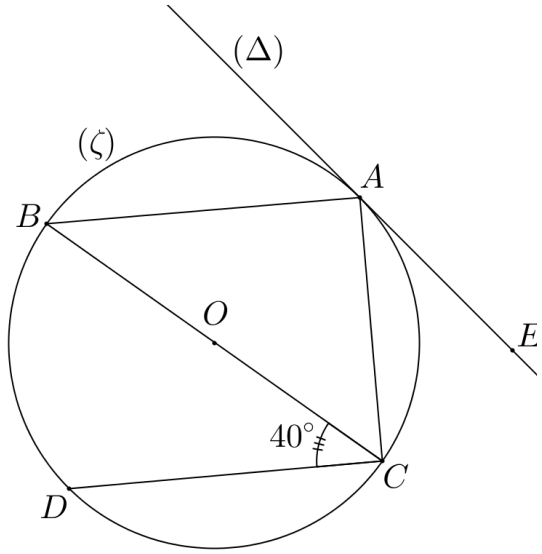
أحسب معللا جوابك :

$B\hat{D}C$ و $A\hat{B}D$ و $B\hat{O}C$

تمرين ②:

نعتبر الشكـل جانبه بحيث : دائرة قطرها $[BC]$.

(Δ) مماس للدائرة (ζ) في A و $(AB) // (CD)$.



1) – أثبت أن : المثلث ABC قائم الزاوية.

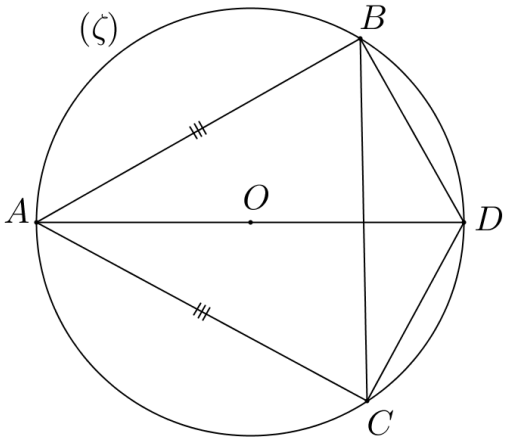
2) – أحسب معللا جوابك : $E\hat{A}C$ ثم $A\hat{O}C$.

تمرين ③:

نعتبر الشكـل جانبه بحيث :

ABC مثلث متساوي الساقين في A .

أثبت أن $[DA)$ هو منصف الزاوية $B\hat{D}C$.



❀ تمرين ④ :

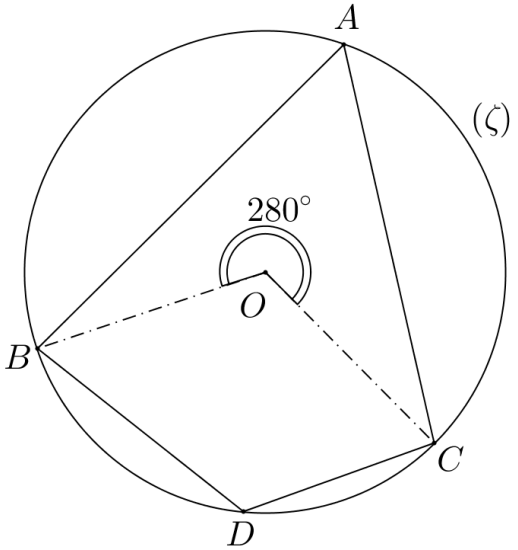
ABC مثلث محاط بدائرة (C) مركزها O.

1) – أرسم الشكل.

2) – أثبت أن : $A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}A = 360^\circ$.

❀ تمرين ⑤ :

نعتبر الشكل جانبه :



أحسب معللا جوابك :

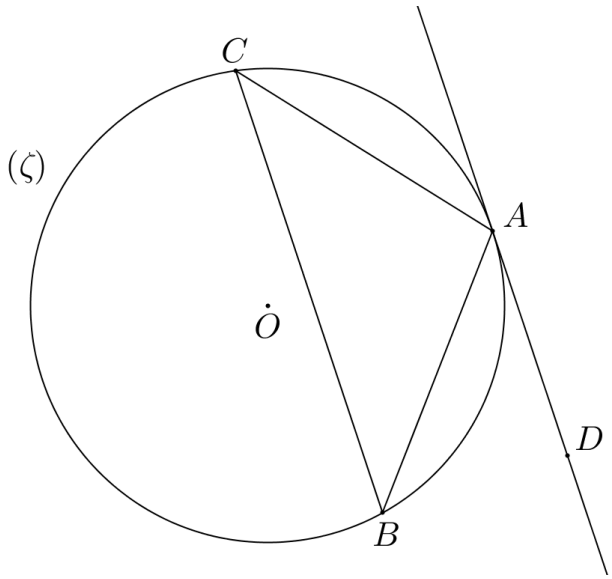
$B\hat{A}C$ و $B\hat{D}C$

❀ تمرين ⑤ :

نعتبر الشكل جانبه بحيث :

(AD) مماس للدائرة (ζ) في A

و $(BC) // (AD)$



أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين.

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⴰⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵉⵍⵖ ⴰⵣⵣⵓⵍⴰⵏ
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة الدار البيضاء الكبرى
نيابة المحمدية

حلول التمارين

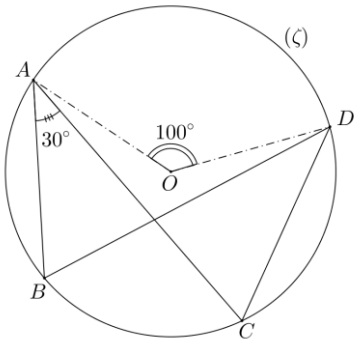
الزاوية المحيطية و الزاوية المركزية

المستـــوى : الثالثة ثانوي إعـدادي

من إعداد الأستاذ : المهـــدي عنيـــس

anissmaths
موقع الرياضيات بالثانوي الإعدادي
ⴰⵙⵎⵍ ⵜⵓⵙⵏⴰⴽⵜ ⵙ ⴰⵙⵉⵏⴰⵏ ⵓⵙⵎⴷⵉ
www.anissmaths.net

تمرين ①:



*/ حساب : $B\hat{D}C$.

لدينا : $A\hat{B}C$ و $B\hat{D}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس BC .

إذن : $B\hat{D}C = A\hat{B}C$ ، و بما أن : $A\hat{B}C = 30^\circ$ فإن : $\boxed{B\hat{D}C = 30^\circ}$.

*/ حساب : $A\hat{B}D$.

لدينا : $A\hat{B}D$ زاوية محيطية مرتبطة بالزاوية المركزية $A\hat{O}D$.

إذن : $A\hat{O}D = 2A\hat{B}D$ ، يعني أن : $A\hat{B}D = \frac{1}{2}A\hat{O}D$

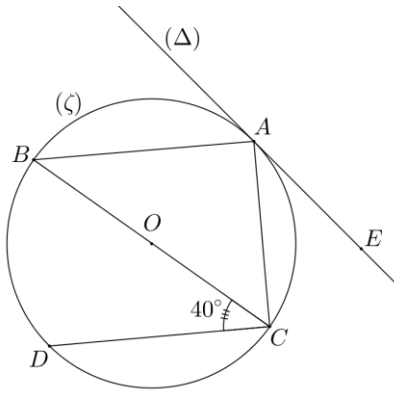
أي : $A\hat{B}D = \frac{1}{2}\times 100^\circ$ و بالتالي فإن : $\boxed{A\hat{B}D = 50^\circ}$.

*/ حساب : $B\hat{O}C$.

لدينا : $B\hat{A}C$ زاوية محيطية مرتبطة بالزاوية المركزية $B\hat{O}C$ ، إذن : $B\hat{O}C = 2B\hat{A}C$

أي : $BOC = 2\times 30^\circ$ و بالتالي فإن : $\boxed{B\hat{O}C = 60^\circ}$.

تمرين ②:



1)– لنثبت أن المثلث ABC قائم الزاوية .

لدينا من خلال الشكل ABC مثلث محاط بالدائرة (ζ) التي قطلاها $[BC]$.

إذن : ABC مثلث قائم الزاوية في A .

2) – */ حساب : $E\hat{A}C$.

لدينا : $E\hat{A}C$ و $A\hat{B}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AC

إذن : $\boxed{E\hat{A}C = A\hat{B}C}$. ①

نعتبر المتوازيين (AB) و (DC) و قاطع لهما (BC) على التوالي في B و C .

لدينا : $A\hat{B}C$ و $B\hat{C}D$ زاويتان متبادلتان داخليا .

إذن : $\boxed{A\hat{B}C = B\hat{C}D}$. ②

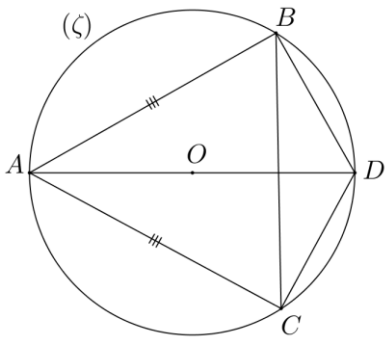
و من ① و ② نستنتج أن : $E\hat{A}C = B\hat{C}D$ ، و بما أن : $B\hat{C}D = 40^\circ$ فإن : $\boxed{E\hat{A}C = 40^\circ}$.

*/ حساب : $A\hat{O}C$.

لدينا : $E\hat{A}C$ زاوية محيطية مرتبطة بالزاوية المحيطية $A\hat{O}C$ ، إذن : $A\hat{O}C = 2\times E\hat{A}C$

أي : $A\hat{O}C = 2\times 40^\circ$ و بالتالي : $\boxed{A\hat{O}C = 80^\circ}$.

تمرين ③ :



لنثبت أن $[DA)$ هو منصف الزاوية $B\hat{D}C$:

*/ لدينا : $A\hat{B}C$ و $A\hat{D}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AC .

إذن : $\boxed{A\hat{B}C = A\hat{D}C}$. ①

*/ و لدينا : $A\hat{C}B$ و $A\hat{D}B$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AB .

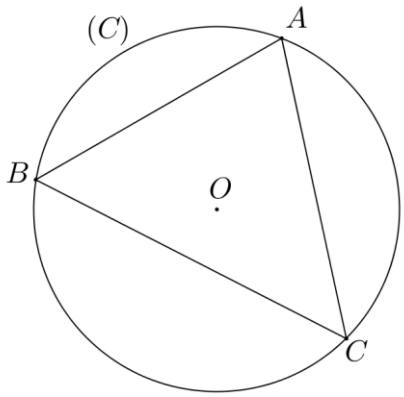
إذن : $\boxed{A\hat{C}B = A\hat{D}B}$. ②

*/ و لدينا : ABC مثلث متساوي الساقين في A .

إذن : $\boxed{A\hat{B}C = A\hat{C}B}$. ③

و من ① و ② و ③ نستنتج أن : $\boxed{A\hat{D}C = A\hat{D}B}$ ، و بما أن الزاويتين $A\hat{D}B$ و $A\hat{D}C$ متحاذيتان فإن : $[DA)$ هو منصف الزاوية $B\hat{D}C$.

تمرين ④ :



لنثبت أن : $A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}A = 360^\circ$.

لدينا : $A\hat{C}B$ زاوية محيطية و $A\hat{O}C$ الزاوية المركزية المرتبطة بها.

إذن : $\boxed{A\hat{O}B = 2A\hat{C}B}$ ①

و لدينا : $B\hat{A}C$ زاوية محيطية و $B\hat{O}C$ الزاوية المركزية المرتبطة بها.

إذن : $\boxed{B\hat{O}C = 2B\hat{A}C}$ ②

و لدينا : $C\hat{B}A$ زاوية محيطية و $C\hat{O}A$ الزاوية المركزية المرتبطة بها.

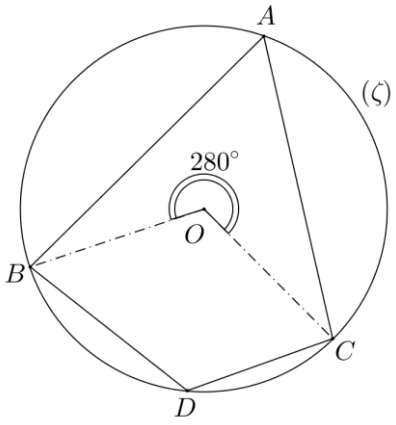
إذن : $\boxed{C\hat{O}A = 2C\hat{B}A}$ ③

و من ① و ② و ③ نستنتج أن :

$$\begin{aligned} A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}A &= 2A\hat{C}B + 2B\hat{A}C + 2C\hat{B}A \\ &= 2\left(A\hat{C}B + B\hat{A}C + C\hat{B}A\right) \\ &= 2\times 180^\circ \\ &= 630^\circ \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}A = 360^\circ}$.

تمرين ⑤ :



*/ حساب : $B\hat{A}C$.

لدينا $B\hat{A}C$ زاوية محيطية مرتبطة بالزاوية المركزية $B\hat{O}C$.

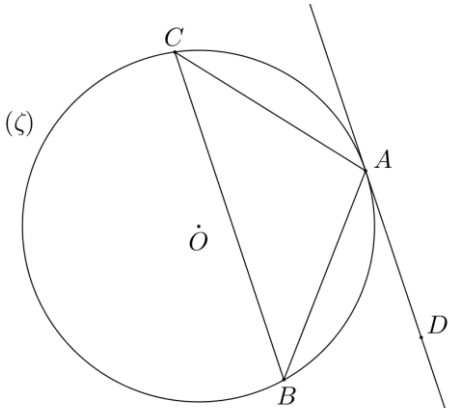
إذن : $B\hat{O}C = 2B\hat{A}C$ ، و منه فإن : $B\hat{A}C = \frac{1}{2}B\hat{O}C$.

و لدينا من خلال الشكل :

$$\begin{aligned} B\hat{O}C &= 360^\circ - 280^\circ \\ &= 80^\circ \end{aligned}$$

و منه فإن : $B\hat{A}C = \frac{1}{2}\times 80^\circ$ و بالتالي فإن : $\boxed{B\hat{A}C = 40^\circ}$.

❀ تمرين ⑥ :



لنثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين :

لدينا : $B\hat{A}D$ و $A\hat{C}B$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AB .

إذن : $\boxed{A\hat{C}B = B\hat{A}D}$ ①

*/ نعتبر المتوازيين (AD) و (BC) و القاطع لهما (AB) على التوالي في A و B .

لدينا : $B\hat{A}D$ و $A\hat{B}C$ زاويتان متبادلتان داخليا.

إذن : $\boxed{A\hat{B}C = B\hat{A}D}$ ②

و من ① و ② نستنتج أن : $\boxed{A\hat{B}C = A\hat{C}B}$.

و بالتالي فإن المثلث aBC متساوي الساقين في A .

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة الدار البيضاء الكبرى
نيابة المحمدية

تمارين

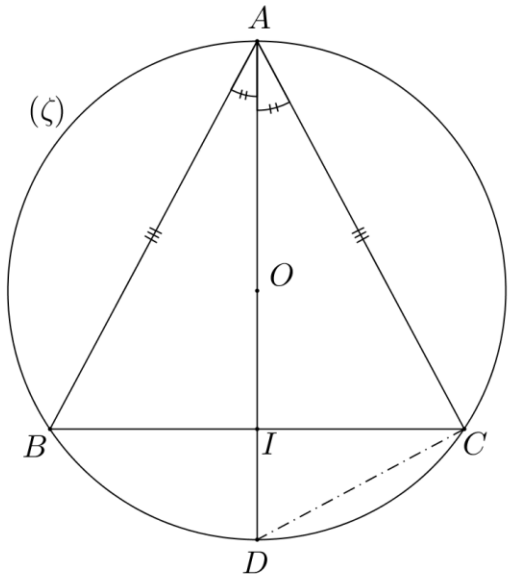
التقـــــايس و التشـــــابه

المستـــــوى : الثالثة ثانوي إعـــدادي

من إعداد الأستاذ : المهـــــدي عنيـــس

موقع الرياضيات بالثانوي الإعدادي
www.anissmaths.net

تمرين ①:



نعتبر الشكـــل جانبه بحيث :

ABC مثلث متساوي الساقين في A

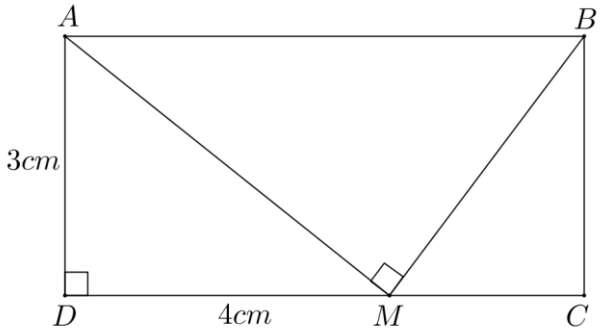
و $[AD)$ منصف $B\hat{A}C$.

1) – أثبت أن المثلثين ABI و ACI متقايسان.

2) – أثبت أن : $D\hat{A}C = I\hat{C}D$.

3) – أ) -- بين أن المثلثين ADC و ICD متشابهان.

تمرين ②:



نعتبر الشكـــل جانبه بحيث :

$ABCD$ مستطيل و AMB

مثلث قائم الزاوية في M .

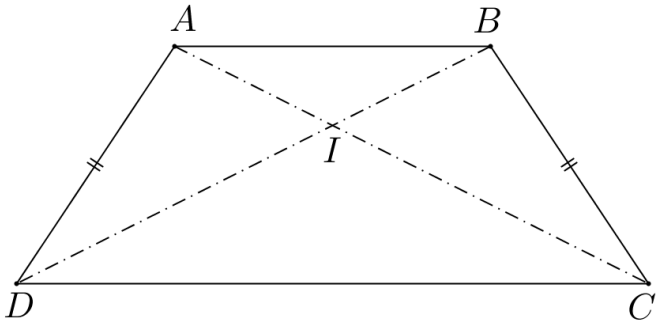
1) – أثبت أن : $AM = 5\,cm$.

2) – أ) -- أثبت أن المثلثين AMB و MAD متشابهان.

ب) -- حدد نسبة تشابههما.

3) – بين أن : $AM^2 = AB \times MD$.

تمرين ③:



نعتبر الشكـــل جانبه بحيث :

$ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه

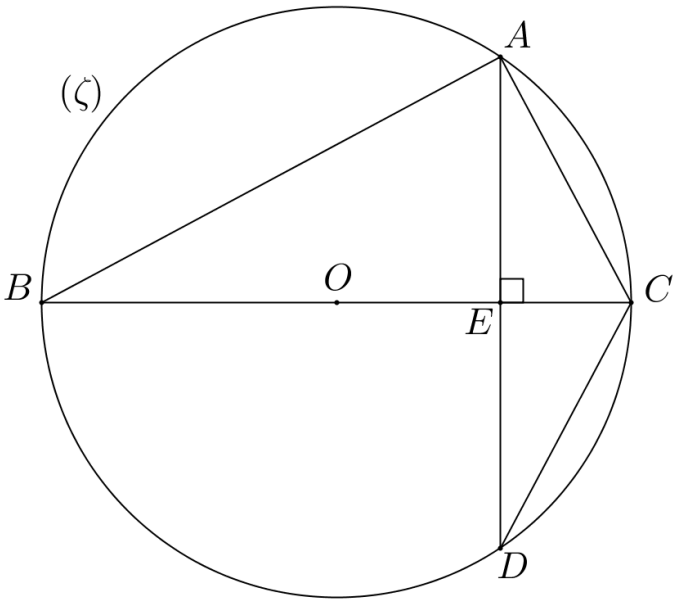
$[AB]$ و $[CD]$ و I تقاطع القطرين.

1) – أثبت أن المثلثين ABD و BAC متقايسان.

2) – أثبت أن المثلثين AIB و CID متشابهان.

❀ تمرين ④ :

نعتبر الشكـــل الآتي :

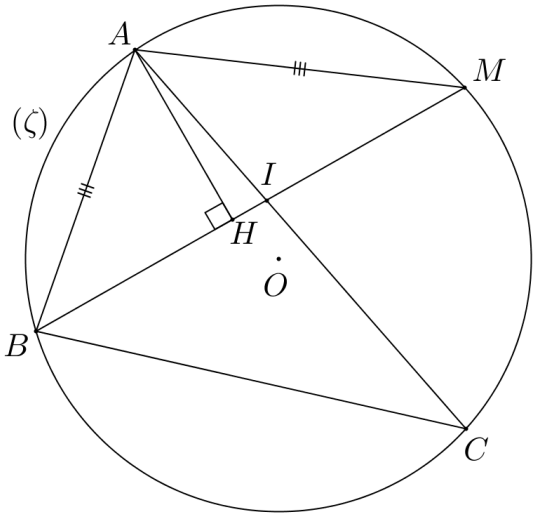


1) – أثبت أن المثلثين ABC و EDC متشابهان.

2) – بين أن المثلثين EAC و EDC متقايسان.

❀ تمرين ⑤ :

نعتبر الشكـــل الآتي :



1) – أ) -- بين أن المثلثين ABI و ABC متشابهان.

ب) -- استنتج أن : $AB^2 = AI \times AC$.

2) – بين أن المثلثين AHB و AHM متقايسان.

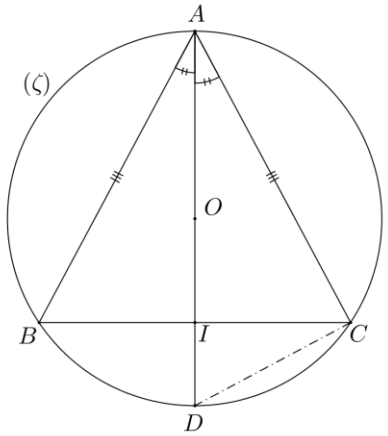
حلول التمارين

التقايس و التشابه

المستوى : الثالثة ثانوي إعدادي

من إعداد الأستاذ : المهدي عنيس

تمرين ①:



1) – لنثبت أن المثلثين ABI و ACI متقايسان :

لدينا : ABC مثلث متساوي الساقين في A .

إذن : $AB = AC$.

و بما أن $[AI)$ منصف الزاوية $B\hat{A}C$ ، فإن : $B\hat{A}I = C\hat{A}I$.

للمثلثين ABI و ACI : و $\left.\begin{array}{l} AB = AC \\ [AI] \text{ ضلع مشترك .} \\ B\hat{A}I = C\hat{A}I \end{array}\right\}$

و حسب الحالة الثانية للتقايس فإن المثلثين ABI و ACI متقايسان.

2) – لنثبت أن : $D\hat{A}C = I\hat{C}D$.

لدينا : $B\hat{C}D$ و $B\hat{A}D$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس BD .

إذن : $B\hat{C}D = B\hat{A}D$ ، أي : $\boxed{I\hat{C}D = B\hat{A}D}$ ①

و نعلم أن : $B\hat{A}I = C\hat{A}I$ ، أي : $\boxed{B\hat{A}D = D\hat{A}C}$ ②

و من ① و ② نستنتج أن : $\boxed{D\hat{A}C = I\hat{C}D}$.

3) – أ) -- لنبين أن المثلثين ADC و ICD متشابهان.

للمثلثين ADC و ICD : و $\left.\begin{array}{l} D\hat{A}C = I\hat{C}D \\ A\hat{D}C = I\hat{D}C \text{ (نفس الزاوية).} \end{array}\right\}$

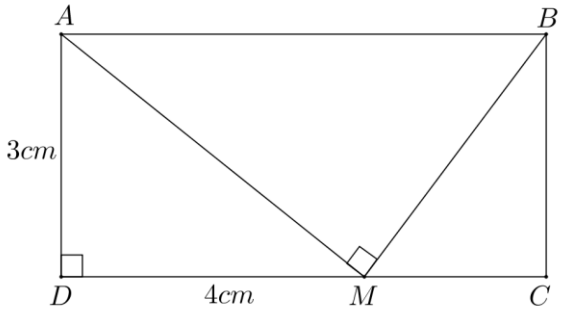
إذن حسب الحالة الأولى للتشابه فإن : ADC و ICD مثلثان متشابهان.

ب) -- لنستنتج أن : $AD \times CI = AC \times CD$.

نعلم أن المثلثين ADC و CDI متشابهان ، إذن : $\frac{CD}{AD} = \frac{CI}{AC} = \frac{DI}{DC}$.

و منه فإن : $\frac{CD}{AD} = \frac{CI}{AC}$ يعني أن : $\boxed{AD \times CI = AC \times CD}$.

❀ تمرين ② :



1) – لنثبت أن : $AM = 5\,cm$.

لدينا من خلال الشكل ADM مثلث قائم الزاوية في D .

إذن حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة فإن :

$AM^2 = DA^2 + DM^2$ ،

أي :

$$AM^2 = 3^2 + 4^2$$
$$= 9 + 16$$
$$= 25$$

و بما أن $AM > 0$ فإن : $AM = \sqrt{5}\,cm$ ، و بالتالي فإن : $\boxed{AM = 5\,cm}$.

2) – أ) -- لنثبت أن المثلثين AMB و MAD متشابهان .

لدينا : $A\hat{D}M = A\hat{M}B$ (زاويتان قائمتان).

و لدينا الرباعي $ABCD$ مستطيل ، إذن : $(DC) // (AB)$.

نعتبر المتوازيين (AB) و (DC) و القاطع لهما (AM) على التوالي في A و M .

لدينا : $A\hat{M}D$ و $B\hat{A}M$ زاويتان متبادلتان داخليا ، إذن : $B\hat{A}M = A\hat{M}D$.

إذن للمثلثين AMD و BAM : و $\left.\begin{array}{l} A\hat{D}M = A\hat{M}B \\ B\hat{A}M = A\hat{M}D \end{array}\right\}$.

و حسب الحالة الأولى للتشابه فإن المثلثين AMD و BAM متشابهان.

ب) -- لنحدد نسبة تشابه المثلثين AMD و BAM :

بما أن المثلثين AMD و BAM متشابهان فإن : $\frac{AB}{AM} = \frac{BM}{AD} = \frac{AM}{MD}$ ، و منه فإن : $\frac{AM}{MD} = \frac{5}{4}$.

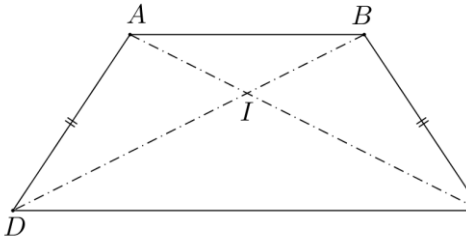
و بالتالي فإن نسبة تشابه المثلثين AMD و BAM هي : $\boxed{\frac{5}{4}}$.

3) – لنبين أن : $AM^2 = AB \times MD$.

نعلم مما سبق أن : $\frac{AB}{AM} = \frac{BM}{AD} = \frac{AM}{MD}$ ،

و منه فإن : $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MD}$ يعني أن : $\boxed{AM^2 = AB \times MD}$.

❀ تمرين ③ :



1) – لنثبت أن المثلثين ABD و BAC متقايسان :

لدينا من خلال الشكل : $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين $[AD]$ و $[BC]$.

إذن : $\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ B\hat{A}D = A\hat{B}C \end{array}\right\}$ و .

للمثلثين ABD و BAC : $\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ [AB] \text{ (ضلع مشترك)} \\ B\hat{A}D = A\hat{B}C \end{array}\right\}$ و .

و حسب الحالة الثانية للتقايس فإن : ABD و BAC متقايسان.

2) – لنثبت أن المثلثين AIB و CID متشابهان :

لدينا : $A\hat{I}B = D\hat{I}C$ (زاويتان متقابلتان بالرأس I).

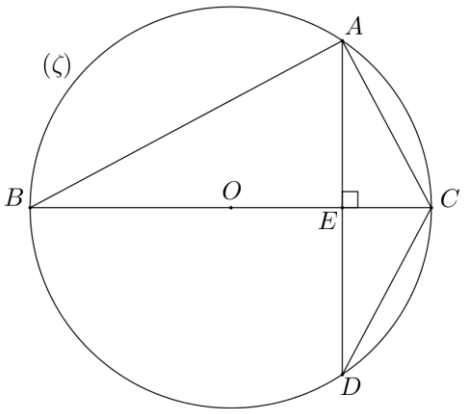
نعتبر المتوازيين (AB) و (CD) و القاطع لهما (AC) على التوالي في A و C.

لدينا $C\hat{A}B$ و $A\hat{C}D$ زاويتان متبادلتان داخليا ، إذن : $A\hat{C}D = C\hat{A}B$ ، أي : $I\hat{A}B = I\hat{C}D$.

إذن للمثلثين AIB و CID : $\left.\begin{array}{l} A\hat{I}B = D\hat{I}C \\ I\hat{A}B = I\hat{C}D \end{array}\right\}$ و .

و حسب الحالة الأولى للتشابه فإن المثلثين AIB و CID متشابهان.

❀ تمرين ④ :



1) – لنثبت أن المثلثين ABC و EDC متشابهان :

لدينا : $A\hat{B}C$ و $A\hat{D}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AC.

إذن : $A\hat{B}C = A\hat{D}C$ ، أي : $A\hat{B}C = E\hat{D}C$.

و لدينا من خلال الشكل : $D\hat{E}C$ زاوية قائمة.

و ABC مثلث محاط بالدائرة (ζ) قطرها $[BC]$.

إذن ABC مثلث قائم الزاوية في A ، و منه فإن : $B\hat{A}C = D\hat{E}C$.

للمثلثين ABC و EDC : $\left.\begin{array}{l} A\hat{B}C = E\hat{D}C \\ B\hat{A}C = D\hat{E}C \end{array}\right\}$ و .

و حسب الحالة الأولى للتشابه فإن المثلثين ABC و EDC متشابهان

2) – بين أن المثلثين EAC و EDC متقايسان.

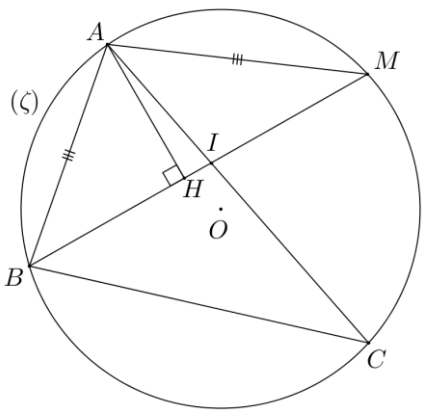
نعلم أن المثلثين ABC و EDC متشابهان ، إذن الزوايا المتناظرة متقايسة ، و منه فإن : $A\hat{C}B = E\hat{C}D$

أي : $A\hat{C}E = E\hat{C}D$.

إذن للمثلثين EAC و EDC : $\left.\begin{array}{l} [EC] \text{ (ضلع مشترك)} \\ A\hat{C}E = E\hat{C}D \\ A\hat{E}C = D\hat{E}C \text{ (زاويتان قائمتان)} \end{array}\right\}$.

و حسب الحالة الثالثة للتقايس فإن المثلثين EAC و EDC متقايسان.

❀ تمرين ⑤ :



1) –أ) -- بين أن المثلثين ABI و ABC متشابهان :

لدينا : $A\hat{M}B$ و $A\hat{C}B$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس AB .

إذن : $\boxed{A\hat{M}B = A\hat{C}B}$ ①

و لدينا من خلال الشكل AMB مثلث متساوي الساقين في A .

إذن : $\boxed{A\hat{M}B = A\hat{B}M}$ ②

و من نستنتج أن : $A\hat{C}B = A\hat{B}M$ ، أي : $A\hat{C}B = A\hat{B}I$.

إذن للمثلثين ABI و ABC : $\left.\begin{array}{l} B\hat{A}C = B\hat{A}I \text{ (زاوية مشتركة)} \\ A\hat{C}B = A\hat{B}I \end{array}\right\}$

و حسب الحالة الأولى للتشابه فإن : AIB و ABC متشابهان.

ب) -- لنستنتج أن : $AB^2 = AI \times AC$:

نعلم أن المثلثين AIB و ABC متشابهان ، إذن : $\frac{AB}{AI} = \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{IB}$.

و منه فإن : $\frac{AB}{AI} = \frac{AC}{AB}$ ، يعني أن : $AB \times AB = AI \times AC$ ، أي : $\boxed{AB^2 = AI \times AC}$.

2) – لنبين أن المثلثين AHB و AHM متقايسان.

نعلم مما سبق أن : $AB = AM$.

لدينا من خلال الشكل : $A\hat{H}B = A\hat{H}M$ (زاويتان قائمتان).

و نعلم أن : $A\hat{M}B = A\hat{B}M$ ، أي : $A\hat{M}H = A\hat{B}H$.

و بما أن في المثلثين AHB و AHM : و $\left.\begin{array}{l} B\hat{A}H + AHM + ABH = 180^\circ \\ MAH + AHM + AMH = 180^\circ \end{array}\right\}$ ، فإن :

$B\hat{A}H + AHM + ABH = MAH + AHM + AMH$ ، و منه فإن : $B\hat{A}H = M\hat{A}H$.

إذن للمثلثين AHB و AHM : و $\left.\begin{array}{l} B\hat{A}H = M\hat{A}H \\ A\hat{B}H = A\hat{M}H \\ AB = AM \end{array}\right\}$.

و حسب الحالة الثالثة للتقايس فإن المثلثين AHB و AHM متقايسان.